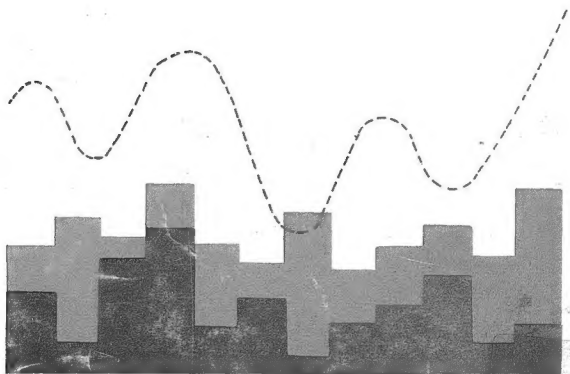


الرياضيات
والإحصاء
لدراسات
المحاسبة
والأعمال



جوردن بانكروفت
جورج أو سايثان



الرياضيات والإحصاء

لدراسات المحاسبة والأعمال

تأليف

جوردن بانكروفت

محاضر أول الرياضيات
معهد شمال ستافورد شاير البوليتكنيكي

جورج أو سليشان

محاضر أساسي الإحصاء
معهد مدينة برمنجهام البوليتكنيكي

ترجمة

الدكتور جمال سامي مقدس

أستاذ الإحصاء الرياضي المساعد

قسم الرياضة البحتة - كلية العلوم

جامعة عين شمس - جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور السيد محمد الغزالي

رئيس قسم الرياضيات - كلية التربية

جامعة عين شمس - جمهورية مصر العربية

دار ماكجرو هيل للنشر



نيويورك . سانت لويس . سان فرانسيسكو . أوكلاند . بوجونا . دوسلدورف . جوهانسبرج . لندن .
مكسيكو . مونتريال . نيودلهي . بنغالور . باريس . ساو باولو . سنغافورة . سيدني . طوكيو . فورتو

جمهورية مصر العربية - القاهرة

حقوق التأليف © ١٩٨١ دار ماكجروهيل للنشر ، إنك . جميع الحقوق محفوظة

Maths and Statistics for Accounting and Business Studies

Gordon Bancroft

George O'Sullivan

أعد الترجمة العربية مركز الأهرام للترجمة العلمية بالقاهرة . لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة سواء كانت الإلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو بالتسجيل أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقعدا .

ISBN 07 084830 0

المحتويات

صفحة

٧	المقدمة
٩	شكر وتقدير
	الفصل الأول تمهيد
١١	١ - ١ دور الرياضيات والاحصاء في المال والاقتصاد
١٢	٢ - ١ الاحصاء الوصفي والاحصاء الاستقرائي
١٢	٣ - ١ بعض المصطلحات الشائعة الاستخدام في الاحصاء
١٣	٤ - ١ حدود علم الاحصاء وسوء استخدامه
١٥	٥ - ١ مصادر الاحصائيات المالية
	الفصل الثاني الرسوم البيانية والمعادلات
١٦	١ - ٢ الخط المستقيم
١٩	٢ - ٢ المعادلات الآتية
٢٦	٣ - ٢ المنحنى من الدرجة الثانية
٣٨	٤ - ٢ المنحنيات اللوغاريتمية والأسية
	الفصل الثالث الرياضة المالية
٤٥	١ - ٣ المتواليات العددية
٥٠	٢ - ٣ المتواليات الهندسية
٥٣	٣ - ٣ الفائدة المركبة
٦٠	٤ - ٣ القيمة الحالية
٦١	٥ - ٣ الخصم
	الفصل الرابع المصفوفات
٦٦	١ - ٤ تمهيد
٦٧	٢ - ٤ القوانين الجبرية للمصفوفات
٧١	٣ - ٤ استخدام المصفوفات لحل المعادلات الآتية

٧٢	٤-٤ حساب معكوس المصفوفات
٧٤	٤-٥ تحليل المدخلات - المخرجات

الفصل الخامس حساب التفاضل

٨١	١-٥ تعريف المشتقة الأولى
٨٦	٢-٥ القيم العظمى والصغرى
٩١	٣-٥ التطبيقات المالية لحساب التفاضل

الفصل السادس جمع البيانات

٩٨	١-٦ أسباب استخدام العينات
٩٩	٢-٦ طرق اختيار العينة
١٠٥	٣-٦ الاستقصاءات

الفصل السابع وصف البيانات الاحصائية

١٠٨	١-٧ التوزيعات التكرارية
١١١	٢-٧ التمثيل البياني للتوزيع التكراري
١١٤	٣-٧ الطرق الأخرى للتمثيل البياني

الفصل الثامن ملخص احصائي

١٢٩	١-٨ تمهيد
١٢٩	٢-٨ الوسط الحسابي
١٣٣	٣-٨ الوسيط
١٣٧	٤-٨ المنوال
١٣٩	٥-٨ مقارنة المقاييس المركزية
١٤٠	٦-٨ الانحراف المعياري
١٤٥	٧-٨ المقاييس الأخرى للانحراف
١٥٢	٨-٨ الالتواء

الفصل التاسع تحليل الانحدار والارتباط

١٥٧	١-٩ الشكل الانتشاري
١٥٨	٢-٩ الانحدار الخطي
١٦١	٣-٩ التنبؤ
١٦٣	٤-٩ الارتباط
١٦٦	٥-٩ ارتباط الرتب

الفصل العاشر السلاسل الزمنية

١٧٢	١-١٠ السلاسل الزمنية ومكوناتها
-----	--------------------------------------

١٧٣	٢-١٠ تقدير المركبات
١٨٠	٣-١٠ التنبؤ

الفصل الحادى عشر الأرقام القياسية

١٨٩	١-١١ تكوين الأرقام القياسية
١٩٧	٢-١١ الرقم القياسى لأسعار التجزئة
٢٠٠	٣-١١ تفسير الأرقام القياسية واستخدامها

الفصل الثانى عشر الاحتمالات

٢٠٥	١-١٢ نظرية الفئات الأساسية
٢٠٨	٢-١٢ تعريفات الاحتمالات
٢١٠	٣-١٢ قاعدة الجمع
٢١٢	٤-١٢ قاعدة الضرب
٢١٥	٥-١٢ نظرية بايز
٢١٨	٦-١٢ التبادل والتوافق

الفصل الثالث عشر تحليل نظرية القرارات

٢٢٤	١-١٣ تكوين القرارات التى تتضمن شكا
٢٢٥	٢-١٣ القيم المتوقعة
٢٣٠	٣-١٣ تحليل شجرة القرارات
٢٣٣	٤-١٣ ضياع الفرصة
٢٣٧	٥-١٣ المعلومات الكاملة
٢٣٩	٦-١٣ معايير أخرى للاختيار

الفصل الرابع عشر التوزيعات الاحتمالية

٢٤٤	١-١٤ التوزيعات الاحتمالية المنفصلة
٢٤٥	٢-١٤ توزيع ذو الحدين
٢٤٩	٣-١٤ التوزيع البواسونى
٢٥١	٤-١٤ التقريب البواسونى لتوزيع ذو الحدين
٢٥٢	٥-١٤ التوزيعات الاحتمالية المتصلة
٢٥٥	٦-١٤ التوزيع الطيى
٢٦٢	٧-١٤ تقريب التوزيع الطيى الى توزيع ذو الحدين

الفصل الخامس عشر التقدير

٢٦٥	١-١٥ توزيع المعاينة للوسط
٢٦٩	٢-١٥ تقدير بارامترات المجتمع
٢٧٤	٣-١٥ تقدير العينة الصغيرة

الفصل السادس عشر الاختيار الاحصائي للفروض

٢٧٨	١٦- ١ المفاهيم الأساسية
٢٨١	١٦- ٢ الاختبارات التي تستخدم التوزيع الطبيعي
٢٨٧	١٦- ٣ اختبارات تستخدم توزيع -

الفصل السابع عشر اختبارات كاي - تربيع

٢٩٢	١٧- ١ توزيع كاي - تربيع
٢٩٤	١٧- ٢ اختبارات جودة التوفيق
٢٩٧	١٧- ٣ جداول الاقتران

الفصل الثامن عشر تطبيقات على المعاينة

٣٠٢	١٨- ١ مقدمة للضبط الاحصائي للجودة
٣٠٩	١٨- ٢ دور المعاينة في المراجعة

٣١٥	الملحق الأول حلول التمارين
٣٢٤	الملحق الثاني جداول احصائية
٣٢٧	الملحق الثالث قائمة القوانين
٣٣١	الملحق الرابع قائمة بالقراءات المقترحة
٣٣٣	المصطلحات العلمية (عربي - انجليزي)
٣٤٤	المصطلحات العلمية (انجليزي - عربي)
٣٥٧	الفهرس

المقدمة

هذا الكتاب نتاج لسنوات طويلة من تدريس الرياضيات والإحصاء لطلبة السنة الأولى من برامج الدراسات التي تنظمها الهيئات المهنية الكبرى للمحاسبة . ومن الخصائص الهامة للكتاب أنه مبني على حلول العديد من أسئلة امتحانات تلك الهيئات في السنوات الماضية . كما أن كثيرا من أسئلة الامتحانات الأخرى معطاه كتمارين للقارئ .

وتتناول الفصول الأولى من الكتاب أسس الرياضيات اللازمة لباقي أجزاء الكتاب ، كما تتناول بالشرح بعض مجالات الرياضيات ذات الأهمية الخاصة لعالم المال والاقتصاد . ولكن الجزء الأكبر من الكتاب يعالج أسس علم الاحصاء وأساليبه مع تطبيقها على مشاكل الاقتصاد والأعمال .

وقد أعد هذا الكتاب أساسا للتحضير لامتحانات الهيئات المهنية للمحاسبة . ولكنه يصلح كذلك لطلبة السنوات الأولى بالكليات التي تمنح درجات علمية في المحاسبة والأعمال . ويغطي الكتاب كذلك متطلبات الوحدات الدراسية التي وضعها مجلس تعليم الأعمال على المستوى الوطني العالي بالمجلسين B1 و B2 .

شكر وتقدير

يود المؤلفان أن يعبرا عن عرفانهما للهيئات المهنية التالية لسماحها بتضمين الكتاب أسئلة امتحاناتها في السنوات السابقة .

ICMA
ACCA
IPM

معهد محاسبي التكاليف والادارة (م م ت أ)
جمعية المحاسبين المعتمدين (ج م م)
معهد ادارة الافراد (م آ)

وفي الحالات التي تضمنت فيها أسئلة الكتاب وتمارين مادة مأخوذة من أسئلة تلك الامتحانات فقد أوردنا اسم الهيئة المهنية ومستوى الامتحان وتاريخه في نهاية السؤال . ولا يعني هذا أن السؤال معطى بالكامل ، أو أنه قد جاء في الامتحان المذكور بنفس الصورة التي جاء بها في المثال ، أو التمرين بالضبط . وبالمثل ففي الحالات التي أوردنا فيها نص الكتاب بيانات مأخوذة من أحد اسئلة الامتحانات ذكرنا اسم الهيئة والامتحان المعنى . أما حلول الاسئلة والتعليق عليها فهي من اعدادنا كلية ، ولا صلة بينها ، وبين أية اجابات نموذجية أعدتها تلك الهيئات المهنية ، أو أعدت بالنيابة عنها .

ونود كذلك أن نفتتح هذه الفرصة لشكر أعضاء هيئة التدريس بمعهد شمال ستافوردشير البوليتكنيكي The North Staffordshire Polytechnic ومعهد مدينة برمنجهام البوليتكنيكي The City of Birmingham Polytechnic لمعاونتهم في اعداد ، ومراجعة الأصول الخطية للكتاب . وفي الختام نعبّر عن شكرنا لزوجتنا آن والبنور لمعاونتهما وتشجيعهما .

الفصل الأول

تمهيد

١-١ دور الرياضيات والإحصاء في المال والاقتصاد

من المهم الرئيسية للمحاسب اتخاذ القرارات المبنية على البيانات المتعلقة بالحالة الاقتصادية لشركة ما . ولما كانت البيانات الاقتصادية بطبيعتها بيانات ذات طبيعة كمية ، فإن المحاسب يجب أن يلم بأساليب تحليل مثل هذه البيانات العددية . لذلك فمن الضروري لكل من يعمل في مجال المال والاقتصاد أن تكون لديه فكرة واضحة عن الرياضيات والإحصاء . والهدف من هذا الكتاب هو إعطاء المعلومات الأساسية في هذين المجالين للقارئ الذي ينوي أن يشتغل بالاقتصاد والأعمال .

وقد تناولنا في الفصول (٢ و ٤ و ٥) الأسس الرياضية اللازمة لبقية أجزاء الكتاب . وتتضمن هذه الفصول : الجبر والرسومات البيانية وحساب التفاضل والتكامل ، وهي ذات أهمية للقارئ الذي لم يدرس هذه الموضوعات من قبل وللقارئ الذي درسها منذ زمن بعيد . وفي الفصل الثالث نتناول تطبيقا ماليا هاما للرياضيات ، وهو الحساب المالي . وبهذا الفصل معالجة متكاملة لهذا الموضوع تبدأ بعرض المتواليات الحسابية العددية والهندسية ، ثم تبنى على أساسها أساليب حساب الربح المركب ، والخصم والاستثمار . ولهذا الفصل أهمية بالغة للمحاسب لأنه كثيرا ما يحتاج لحساب نتيجة استثمار معين . وسيجد القارئ أن اجراء تلك الحسابات الهامة لا يحتاج إلا لقدر محدود من المعلومات الرياضية .

أما باقى الكتاب - وهو الجزء الأكبر منه - فيتناول أساليب واستخدامات نظرية الاحتمالات والإحصاء . وهناك علاقة نظرية بين دور المحاسبة ودور الإحصاء . والفرق بينهما أن لدى المحاسب جداول من البيانات المالية بدلا من نتائج المسح الإحصائي ، أو نتائج تجربة علمية . وعادة ما يقيس المحاسب بياناته بوحدات نقدية في حين يقيسها الآخرون بوحدات الطول ، أو بعدد مرات نجاح التجربة ، أو ما أشبه .

وبالرغم من تلك العلاقة الواضحة بين الإحصاء والمحاسبة إلا أن مهنة المحاسبة لم تقبل استخدام الإحصاء إلا في السنوات العشرين ، أو الثلاثين الأخيرة فقط . وقد تزايد استخدامه بشكل ملحوظ في مجال المراجعة بواسطة العيّنات . ففي الماضي كان المراجعون يختارون عيناتهم بشكل تقديري ، أو بمعنى آخر طبقا لرأيهم الشخصي . وللأسف لا توجد طريقة لقياس دقة هذا النوع من العيّنات . ولكن الحال يختلف بالنسبة للعيّنات الإحصائية . فهذه الأخيرة تمتاز بميزة كبرى ، وهي أنها يمكن أن تعطى دقة معروفة مقدما وهو أمر لا يتوافر في العيّنات التقديرية .

ومع تطور الكمبيوتر والميكروكمبيوتر ، فمن الواضح أن دور المحاسب سيتغير إذ سيقبل اشتغاله بالحسابات المتعلقة بالبيانات المالية ، وسينشغل أكثر - بعملية اتخاذ القرارات في الشركة . وبالتالي فمن الضروري أن تكون لدى المحاسب فكرة صحيحة عن الأساليب الموضوعية الكمية .

١-٢ الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستقرائي

كثيرا ماتفرق مراجع علم الإحصاء بين الإحصاء الوصفي ، والإحصاء الاستقرائي . والإحصاء الوصفي يعنى مجرد تقديم البيانات فى صورة يسهل فهمها . أما الإحصاء الاستقرائي فيعنى طرق تحليل البيانات بحيث يمكن استنباط النتائج عن المجتمع الذى أخذت منه تلك البيانات .

ولو كانت لدينا كمية كبيرة من البيانات العددية ، فإن الإحصائى سيحاول أن يربتها فى صورة تجعل من السهل قراءتها وفهمها . وقد يتضمن هذا تبويب البيانات وتقديمها على شكل جدول للتكرار ، أو تقديمها على شكل رسم بياني يسهل تصور معناها فورا . ويمكن بعد ذلك حساب بعض المقاييس ، أو المؤشرات الإحصائية مثل النسب ، أو المتوسطات . وهذه المرحلة الأولى من وظيفة علم الإحصاء ، والتي تتضمن ترتيب البيانات وعرضها وتجميعها تدخل فى نطاق الإحصاء الوصفي . وستناول هذا المجال من مجالات علم الإحصاء فى : الفصول من السابع الى الحادى عشر . وبالطبع يجب أولا جمع البيانات حتى تستطيع استخلاص المعلومات المفيدة منها . ويمكن اجراء ذلك بوسائل عديدة ، وسنشرح تلك الوسائل فى الفصل السادس .

وأحد الأسباب الهامة لزيادة أهمية الإحصاء فى السنوات الأخيرة هو تطوير أساليب للمساعدة فى عملية اتخاذ القرارات فى مجال الأعمال . وعادة ما يتضمن ذلك اجراء التنبؤات والتقديرات والاستنتاجات عن مجموعة من المتغيرات أكبر من تلك التى تمت ملاحظتها فعلا . وقد تناولنا هذا النوع من الإحصاء الاستقرائي فى الفصول الأربعة الأخيرة من الكتاب (وهى الفصول من الخامس عشر الى الثامن عشر) . ولابد كأساس لفهم الإحصاء الاستقرائي من دراسة نظرية الاحتمالات ، وهى مشروحة فى الفصول (الثانى عشر والثالث عشر والرابع عشر) .

ولتوضيح الفرق بين الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستقرائي نظرح المثال التالى :

تدخل شركة كبرى فى آلاف التعاملات المالية كل سنة . وقد طلب من أحد المديرين بالإدارة المالية بالشركة أن يحصى عدد التعاملات التى تتجاوز فى حجمها 1000 £ . وقد قام المدير بفحص 500 تعامل فوجد أن 75 منها تتجاوز ذلك العدد .

وما دامت الشركة مهتمة فقط بالـ 500 حالة التى تمت دراستها يمكن القول أنها تجرى دراسة فى نطاق الإحصاء الوصفي . أما اذا أرادت الشركة أن تصل الى نتائج بشأن جميع التعاملات فإنها عندئذ تدخل فى مجال الإحصاء الاستقرائي . وفى الواقع فإن الشركة عندئذ تقوم بتعميم النتائج على جميع التعاملات فى حين أنها قامت بدراسة عند محدود منها فقط .

١-٣ بعض المصطلحات الشائعة الاستخدام فى الإحصاء

لتسهيل فهم علم الإحصاء من المفيد أن نقدم التعاريف التالية لبعض المصطلحات الإحصائية الشائعة الاستخدام . وستستخدم كثير من هذه المصطلحات فى الفصول التالية :

المجتمع : المجتمع هو المجموعة الكاملة من المفردات المراد بحثها ، وعلى سبيل المثال كل التعاملات المالية المسجلة بأحدى الشركات .

العينة : العينة هى فئة جزئية من المجتمع . وأعضاء العينة هم المفردات التى تجرى عليها القياسات . وتستخدم النتائج التى نحصل عليها للعينة لاستنباط النتائج عن المجتمع الذى سحبت منه العينة .

المتغير: المتغير هو ما يقاس في كل مفردة من مفردات العينة ، وعلى سبيل المثال قيمة التعامل المالى ، أو الأجر الذى يحصل عليه عمال المصنع كل أسبوع .

المتغير الكمي : هو متغير يمكن التعبير عنه ككمية عديدة . وعلى سبيل المثال أرباح شركة .

المتغير الوصفي : متغير لا يمكن قياسه كميا ، وإنما يمكن تصنيفه فقط مثل لون عيون أحد الأشخاص .

المتغير المنفصل : هو متغير لا يأخذ إلا قيما محددة منفصلة ، وعلى سبيل المثال عدد المديرين باحدى المؤسسات .

المتغير المستمر : متغير يمكن أن يأخذ أية قيمة في مدى معين ، وعلى سبيل المثال طول الأشخاص .

البارمتر : البارمتر هي قيمة نصف المجتمع مثل متوسط جميع التعاملات المالية .

الاحصائية : الاحصائية هي قيمة مستنتجة من البيانات لوصف العينة .

النسبة : النسبة هي تقدير لعدد مرات احتواء كمية على كمية اخرى . ويحصل عليها بقسمة احدى الكميتين على الأخرى . وعلى سبيل المثال :

$$2 = \frac{\text{الأجر الأسبوعي لفريد}}{\text{الأجر الأسبوعي لبيروت}} = \frac{£120}{£60}$$

أى أن نسبة أجر فريد الى أجر بيروت هي 2 ، أو بمعنى آخر ، فإن « فريد يتقاضى ضعف أجر بيروت » .

النسبة المئوية : النسبة المئوية هي ما نحصل عليه عند ضرب نسبة ما في 100 . وهكذا فإن النسبة المئوية تقلنا على القيمة التى ستكون عليها الكمية الأولى لو كانت الكمية الثانية مساوية لـ 100

$$200 = 100 \times \frac{120}{60} = 100 \times \frac{\text{أجر فريد}}{\text{أجر بيروت}}$$

أى أن أجر فريد يعادل 200% من أجر بيروت . وهذا يعنى أنه مقابل كل 100 جنيه يتقاضاها بيروت ، فإن فريد يتقاضى £200.

التكرار : تكرار قيمة ما ، أو مدى قيم متغير ما ، هو تقدير لعدد المفردات في العينة التى يأخذ فيها المتغير هذه القيمة أو القيم في مدى المعنى .

١ - ٤ حدود علم الإحصاء وسوء استخدامه

المفروض أن يلعب الإحصاء دورا رئيسيا في اظهار الحقيقة . ولكن كثيرا من الناس يشكون في أى بيان احصائي ، ويعتبرون أنه وسيلة لتزييف الواقع ولعل أغلبنا سمعنا التعليق الساخر « إن الأرقام لا تكذب ، ولكن الكذابين يضعون الأرقام » أو « لو قضى على الإحصائيين جميعا لكان هذا أفضل » . ولكن أسوأ التعليقات التى قيلت هي بلاشك مقولة ديزرائيلى الساخرة : « هناك أكاذيب قذرة واحصائيات » . وقد ظهرت هذا الشك في الإحصاء أساسا بسبب سوء استخدام الإحصاء بواسطة أشخاص غير مؤهلين ، وليس بواسطة الاحصائيين . ومثل هؤلاء الأشخاص يمثلون بالنسبة للاحصائي المؤهل مايمثله أدهياء الطب بالنسبة للطبيب المؤهل . وقد تكون إساءة استخدام الإحصاء ناتجة عن

الجهل ، أو عن نية مبيتة للخداع (وكثيرا ماتركت وسائل الاعلان هذه الجريمة) . ولما كان الجمهور كثيرا ما يتعرض لهذا النوع من سوء استخدام الاحصاء ، فسنورد هنا بعض الأمثلة لذلك . وبالطبع فإن هدفنا من ذلك ليس تعليم تلك الاستخدامات الخاطئة ، وانما توعية القارئ حتى لا يندفع بها .

مثال : الخطأ الحسابي : « كان أجرى منذ خمس سنوات 25 جنيها في الأسبوع وهو الآن مئة ، أى أنه زاد بمقدار 400% » - والزيادة الصحيحة هي 300% وليست 400% .

مثال الدقة الزائفة : « إن العمر المتوسط الذى يبدأ فيه الأولاد التدخين هو 10.718 سنة » . ونلاحظ أن الرقم المعطى دقيق لأقرب ثلث يوم . والواقع أنه حتى العينة الكبيرة لن تعطينا دقة أفضل من عدة أيام للعمر المتوسط . كما أنه لا فائدة حقيقية في هذا القدر الكبير من الدقة . فلاحظ أن اعطاء الرقم دقيقا لأقرب نصف عام سيكون كافيا لجميع الأغراض .

مثال لسوء استخدام الرسومات البيانية : لنفرض أننا نريد تصوير البيانات التالية على رسم بياني :

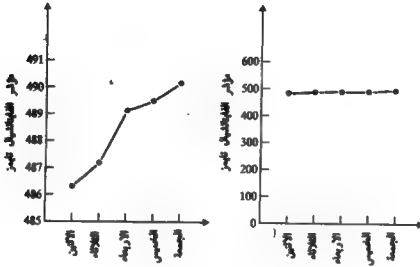
الجمعة	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الاثنين	اليوم
490.2	489.5	489.1	487.2	486.3	مؤشر الفاينانشيل تايمز

ويعطى الشكل ١ - ١ : رؤيتين مختلفتين لنفس هذه المجموعة من البيانات . والرسم البياني الأسير يعطى صورة مبالغيا فيها لارتفاع في مؤشر الفاينانشيل تايمز . أما الرسم البياني الأيمن فهو أقرب للواقع حتى وإن كانت الزيادة في مؤشر الفاينانشيل تايمز لآثرى إلا بالكاد . إذ يجب اختيار مقياس الرسم المناسب ، والأهم من ذلك ضرورة توضيح ذلك المقياس على الرسم فعلا .

مثال : المسح الاحصائي المتحيز : كثيرا ماتقول لنا وسائل الإعلان أن أربع فقط من كل خمس تفضل غذاء القطط « كاتوتشانكس » مثلا . ومع ذلك فنادرا ما نذكر لنا تلك الوسائل كيفية الحصول على هذا الرقم ، وكيف أجريت التجربة ، وما هي أنواع الغذاء الأخرى التي كانت القطط تستطيع الحصول عليها ؟ وفي النهاية يمكننا بسهولة أن نصدق أن أكثر من 80% من القطط الجائعة ستفضل طبقا مليئا بغذاء « كاتوتشانكس » على طبق فارغ تماما !

مثال للسمية المجهولة : لنفترض أن مدير التسويق باحدى الشركات يريد أن يتأكد مما اذا كان شعار جديد للنداعة سيحقق زيادة في المبيعات . وقد قرر التجربة لمدة شهر بتعاون الادارة . وفي نهاية هذه الفترة يلاحظ أن المبيعات قد زادت فعلا بالنسبة للشهر الماضي ، فيستنتج من ذلك أن الشعار الاعلاني الجديد قد أفاد الشركة فعلا .

ولكن هذا قد لا يكون صحيحا مع الأسف . فهناك عدد من الأسباب المحتملة لزيادة المبيعات . فقد تكون المبيعات قد زادت بسبب القرب من اعياد الميلاد (الكريسماس) وفيها تميل جميع المبيعات الى الزيادة . وقد يكون عدد أيام السبت في هذا الشهر أكثر منه في الشهر الماضي . وقد يكون السبب هو أن إحدى الشركات المنافسة قد أغلقت مؤخرا . ويجب قبل التوصل الى أية نتائج بحث تلك العوامل وغيرها بكل دقة .



شكل ١-١

١-٥ مصادر الإحصائيات المالية

في عالمنا المعاصر تنهال علينا البيانات الإحصائية من الإدارات الحكومية والشركات الخاصة ومعاهد الأبحاث . وفي العادة فإن القطاع الخاص يهتم بالمعلومات عن شركة واحدة فقط . وقد تتعلق تلك المعلومات بالأجور ، أو بالمبيعات ، أو بإنتاجية العاملين . وفي العادة تكون هذه المعلومات هامة للشركة نفسها أساسا وأحيانا للشركات المنافسة . وتجمع هذه المعلومات للاستعانة بها في عملية اتخاذ القرارات بالشركة .

أما معلومات القطاع العام فتقدم بجمعها عادة الإدارات الحكومية وتعلق بالبلاد ككل . وفي بريطانيا يقوم المكتب المركزي للإحصاء بتنسيق ونشر نتائج الإحصاءات التي تجمعها تلك الإدارات . وعلى سبيل المثال ، فإن « الملخص الإحصائي السنوي » يتضمن كما كبيرا من المعلومات الهامة والمفيدة عن بريطانيا . وهناك كذلك « الإحصائيات المالية » التي تصدر شهريا ، وتتضمن أهم الإحصائيات المالية في بريطانيا ، ومنها مايتعلق بالحكومة المركزية والحكم المحلي والهيئات العامة والبنوك وشركات البناء والتشييد وشركات التأمين . وبالإضافة إلى ذلك ، فإن بها معلومات عن أسعار الرهن وأسعار الفائدة ، وأسعار العملات ، والحد الأدنى لمعدل الاقتراض . وهناك قسم يتناول شئون المال والاقتصاد بالخارج . ومن المطبوعات الحكومية الأخرى الهامة « الاتجاهات الاقتصادية » و « الكتاب الأزرق عن الدخل القومي والنفقات » . ومن المطبوعات الأخرى التي تتضمن معلومات مالية واقتصادية هامة جريدة « الإيكونوميست » و « الفاينانشيال تايمز » و « بانكر » و « جورنال أوف في أنستيتوت أولف بانكرز » .

الفصل الثاني

الرسومات البيانية والمعادلات

١-٢ الخط المستقيم

من طرق المحاسبة المعروفة للجميع بحكم استخدامها في تقاضى الفواتير المنزلية هي أن يكون المطلوب عبارة عن مبلغ ثابت ، أو ايجار مضافا اليه مبلغ يتناسب مع عدد وحدات السلعة المستهلكة .

وعلى سبيل المثال : فإن فاتورة استهلاك الكهرباء عن فترة معينة قد تتضمن مبلغا ثابتا هو £4.50 مضافا إليها مبلغ 4p لكل وحدة من الطاقة الكهربائية المستهلكة . فإذا كان عدد الوحدات المستهلكة 500 فإن جملة الفاتورة بالجنية تكون :

$$4.50 + 0.04 \times 500 = 4.50 + 20 = £24.50$$

أما إذا كان عدد الوحدات المستهلكة هو 700 وحدة ، فإن جملة الفاتورة بالجنية تكون

$$4.50 + 0.04 \times 700 = 4.50 + 28 = £32.50$$

وصيغة عامة تكون :

$$\text{جملة الفاتورة} = 4.50 + 0.04 \times \text{عدد الوحدات المستهلكة} \quad (١-٢)$$

وبالمثل ، فإن فاتورة التلفزيون عن ثلاثة أشهر قد تتضمن ايجارات قدرها £9.50 زائدا مبلغا اضافيا مقداره 3.5p من كل وحدة مكالمات إضافية سجلها العدد ، فإذا كان مسجله المدة في الشهور الثلاثة هو 200 وحدة ، فإن جملة الفاتورة بالجنيه تكون :

$$9.50 + 0.035 \times 200 = 9.50 + 7 = £16.50$$

وصيغة عامة تكون :

$$\text{جملة الفاتورة} = 9.50 + 0.035 \times \text{عدد الوحدات التي يسجلها المعداد} \quad (٢-٢)$$

والمعادلتان (١-٢) و (٢-٢) هما مثالان للمعادلات الخطية (أو معادلات الخط المستقيم) ولكن نفهم السبب في استخدام هذا التعبير تأخذ المعادلة (١-٢) ونختار نقطة من اعداد الوحدات المستهلكة ونحسب جملة الفاتورة في كل حالة :

عدد الوحدات المستهلكة	100	200	300	400	500	600	700	800
جملة الفاتورة $x = 4.50 + 0.04$	8.50	12.50	16.50	20.50	24.50	28.50	32.50	36.50
عدد الوحدات (ب)								

والخطوة التالية هي أن نوقع كل زوج من هذه القيم على ورق رسم بياني يكون فيه المحور الأفقي ممثلاً لعدد الوحدات المستهلكة والمحور الرأسي ممثلاً لجملة الفاتورة. ونسمى المنحنى المار بالنقط الموقعة « بالرسم البياني » لجملة الفاتورة مقابل عدد الوحدات المستهلكة. وكما نرى من الشكل ١-٢ فإن هذا الرسم البياني عبارة عن خط مستقيم.

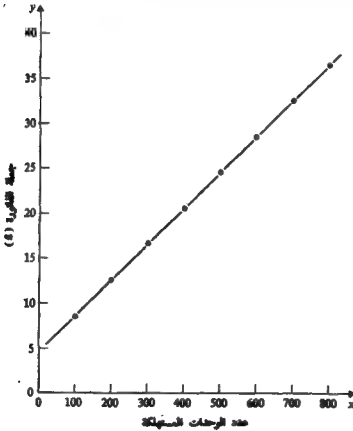
تمرين ١-٢ : ارسم الشكل البياني لجملة الفاتورة مقابل عدد الوحدات المقاسة « بالمداد » في الحالة التي تكون فيها جملة فاتورة التليفون مساوية لإيجار قنطرة £ 9.50 مضافاً إليه 3.5 بنس لكل وحدة، وذلك لعدد من الوحدات يتراوح من 150 إلى 450 بخطوات مقدارها 50 وحدة.

والشكل البياني الممثل لاجابة على هذا التمرين عبارة عن خط مستقيم كذلك. وهكذا نرى انه مهما كانت قيم المبلغ الثابت ورسوم الاستهلاك لكل وحدة مستهلكة فإن الرسم البياني الذي يمثل جملة الفاتورة مقابل عدد الوحدات المستهلكة في مثل هذا النظام للمحاسبة يكون دائماً بشكل خط مستقيم. أي أنه اذا كانت

$$\text{جملة الفاتورة} = a + b \times \text{عدد الوحدات المستهلكة}$$

مهما كانت قيم الأعداد a و b فإن الرسم البياني يكون خطاً مستقيماً.

ولكن المخطوط المستقيمة لها تطبيقات أخرى كثيرة، وليس فقط في حالة الفواتير المنزلية. وسنرى بعضاً من هذه



شكل ١-٢

التطبيقات في الفصل التاسع . ومن التطبيقات الأخرى الجديرة بالذكر تكاليف انتاج سلعة ما . ويمكن اعتبار أن هذه التكاليف تتكون من تكاليف ثابتة مضافا إليها تكاليف تتناسب مع عدد الوحدات المنتجة ، وتسمى بالتكاليف المتغيرة . وهكذا فإن :

$$\text{التكاليف الكلية} = a + b \times x \text{ عدد الوحدات المنتجة}$$

حيث a التكاليف الثابتة و b التكاليف المتغيرة لكل وحدة منتجة . وهذا الرسم البياني أيضا عبارة عن خط مستقيم . ومن وجهة النظر الرياضية ، فإن جميع هذه الحالات متماثلة ، ويمكن تمثيلها بمعادلة واحدة هي :

$$y = a + bx$$

وهذه هي المعادلة العامة للخط المستقيم . والمتغيران x , y يوقمان على المحور الأفقي والرأسي على الترتيب - يمكن أن يمثل أي متغيرين مأخوذين من تطبيق معين . وعلى سبيل المثال : يمكن أن تمثل y جملة الفاتورة في حين تمثل x عدد الوحدات . أو قد تمثل y التكاليف الكلية في حين تمثل x عدد الوحدات المنتجة .

تمرين ٢-١ : ارسم الشكل الذي يمثل العلاقة $y = 5 - 2x$ مستخدما قيم x التالية 3 ، -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 .

لاحظ أن a هي قيمة y عندما تكون $x = 0$. أي أنها قيمة y في المكان الذي يقطع فيه الخط المستقيم محور y .

وتسمى a الجزء المقطوع من محور y ،

وتسمى b معدل تغير y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة .

أي أنها تساوي مثلا التغير في جملة الفاتورة عندما تستهلك وحدة إضافية واحدة ، أو التغير في جملة التكاليف عندما تنتج وحدة إضافية واحدة .

وبالنسبة للرسم البياني ، فإن b تمثل ميل الخط المستقيم . وعندما تكون قيمة b كبيرة ، فإن هذا يعني تغيرا كبيرا في y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة ، أي أن الخط يكون شديد الانحدار . وبالعكس فعندما تكون قيمة b صغيرة ، فإن هذا يعني تغيرا صغيرا في y عندما تتغير x بمقدار الوحدة ، وبالتالي يكون الخط قليل الانحدار . ويلاحظ أنه إذا كانت b سالبة ، فإن y تتناقص عندما تزيد x أي أن الخط ينحدر الى أسفل كما في المثال الأخير أعلاه . مثال ٢-١ : رسم خط مستقيم يقطع محور y عند 4.5 ويمر خلال النقطة التي يكون عندها $x = 4$ و $y = 6.5$ فما هو ميل الخط ؟

الإجابة : لنرمز للميل بالرمز b وعندئذ تكون معادلة الخط $y = 4.5 + bx$. ولما كان الخط يمر بالنقطة $x = 4$ ، $y = 6.5$ فإننا نحصل على $6.5 = 4.5 + b \times 4$ أي أن :

$$4b = 2$$

$$b = 0.5$$

إذاً. ميل الخط هو 0.5 ، وهذا يعني أنه عند زيادة x بمقدار الوحدة ، فإن y تزيد بمقدار 0.5 .

تمرين ٢-١-٣ : خط مستقيم ميله 5 ويمر خلال النقطة التي يكون عندها $x = 3$ و $y = 12$ فما مقدار الجزء الذي يقطعه من محور y ؟

٢-٢ المعادلات الآتية :

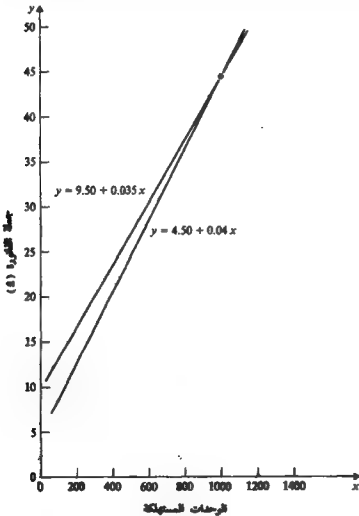
لنعتبر - مرة أخرى - الفاتورتين المنزليتين اللتين بحثناهما في الجزء ٢-١ . وباستعمال نفس الرموز المستعملة سابقا للمخطوط المستقيمة نجد أن فاتورة الكهرباء

$$y = 4.50 + 0.04x$$

بينما فاتورة التليفون

$$y = 9.50 + 0.035x$$

ويعطى الشكل ٢-٢ - هذين الخطين المستقيمين موقعين على نفس المحاور . ونرى من الرسم البياني أن هذين الخطين يتقاطعان عند النقطة $x = 1000$ و $y = 44.50$ أي أن هذه النقطة تقع على كلا الخطين . ويحقق زوج القيم $x = 1000$ ، $y = 44.50$ المعادلتين في آن واحد . ومعنى هذا بالنسبة للمثال الذي ذكرناه هو أن المبلغ الوحيد من



شكل ٢-٢

الوحدات المستهلكة من كل من الكهرباء والمكالمات التلفونية الذى ينتج عنه فاتورتان متساويتان هو 1000 وحدة . فلذا تم استهلاك هذا العدد من الوحدات من الكهرباء ، أو من المكالمات التلفونية ، فإن الفاتورتين الناتجتين تكون كل منهما مساويا لـ £ 44.50 .

ويمكن حساب نقطة تقاطع المستقيمين من معادليتهما دون الحاجة الى رسم . ولهذا الفرض ، فإننا عادة نكتب المعادلتين بحيث تكون الحدود المتغيرة على الجانب الأيسر ، والحدود الثابتة على الجانب الأيمن . وهكذا يصبح لدينا :

$$y - 0.04x = 4.50 \quad (٣-٢)$$

$$y - 0.035x = 9.50 \quad (٤-٢)$$

وتسمى مثل هاتين المعادلتين اللتين نبحث عن قيم لـ x و y تحققهما معا بالمعادلات الآتية :

والخطوات التى تستعمل لحل هذه المعادلات هى :

(أ) ضرب جميع حدود المعادلة فى مقدار ثابت .

(ب) جمع ، أو طرح المعادلات لاستبعاد المتغيرات .

وبالنسبة للمثال المذكور لاداعى لاستخدام الخطوة (أ) لأن طرح إحدى المعادلتين من الأخرى يؤدي الى استبعاد y ، ويجعل الوصول الى حل لـ x ممكنا .

اذ أن طرح (٤-٢) - (٣-٢) يعطى

$$0.005x = 5$$

وبالتالى فإن :

$$x = \frac{5}{0.005} = 1000$$

وبعد إيجاد قيمة x يمكن التعويض بها فى إحدى المعادلتين للحصول على y . وباستخدام المعادلة (٣-٢) نحصل على $y = 44.50 = 4.50 + 0.04 \times 1000 = 4.50 + 40$ ومن هذا نصل الى زوج القيم $x = 1000$ ، $y = 44.50$ الذى حصلنا عليه من الرسم .

مثال ٢-٢-١ : تقوم شركة ما بتصنيع متجين هما A و B بواسطة عمليتى تصنيع هما X و Y .

والطاقة القصوى للعملية X هى 1900 ساعة وللعملية Y هى 5000 ساعة . وتحتاج الوحدة الواحدة من المنتج A الى أربع ساعات من العملية X وساعتين من العملية Y . أما الوحدة الواحدة من المنتج B فتحتاج الى ساعة من العملية X وخمس ساعات من العملية Y .

وال المطلوب حساب عدد الوحدات التى تنتج من كل من المتجين A و B لكى يتم استغلال الحد الأقصى من الطاقة المتاحة (م م ت أ - الأساس ب نوفمبر ١٩٧٩) .

الإجابة : لنفرض أنه تقرر إنتاج u من وحدات المنتج A و v من وحدات المنتج B . وعندئذ سيكون عدد ساعات العملية X اللازمة هو $4u + v$. فلذا استغللت الطاقة القصوى المتاحة للعملية X سيكون .

$$4u + v = 1900$$

(٥-٢)

وبغض الطريقة إذا استغلت الطاقة القصوى للمضخة Y سيكون :

$$2u + 5v = 5000 \quad (٦-٢)$$

وهكذا يمكن إيجاد عدد الوحدات التي يلزم انتاجها لاستغلال كل الطاقة الانتاجية المتاحة بحل المعادلتين $(٥-٢)$ و $(٦-٢)$ كزوج من المعادلات الآتية في u و v .

ويضرب طرفي المعادلة $(٦-٢)$ في 2 نحصل على

$$4u + 10v = 10000 \quad (٧-٢)$$

ويطرح المعادلة $(٥-٢)$ من المعادلة $(٧-٢)$ نحصل على

$$9v = 8100$$

ومنها

$$v = 900$$

ويتعويض هذه القيمة في المعادلة $(٥-٢)$ نحصل على

$$4u + 900 = 1900$$

$$4u = 1000$$

$$u = 250$$

أي أن :

ومنها نستنتج أن :

وهذا يعني أن الطاقة الانتاجية المتاحة تكون مستغلة تماما لو أنتجنا 250 من وحدات المنتج A و 900 من وحدات المنتج B .

تمرين ٢-٢-١ : استخدم طريقة الرسم البياني لحل المعادلتين الآتيتين التاليتين :

$$2x - 3y = 9$$

$$4x - y = 8$$

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٩)

احدى تطبيقات المعادلات الآتية هو أسلوب بحوث العمليات ويسمى بالبرمجة الخطية . وفي العادة يتناول هذا التطبيق موقفا انتاجيا كالموقف المذكور . في المثال ٢-٢-١ ، ولكن المطلوب يكون ليس مجرد استغلال كل الطاقة المتاحة .

وانما تحقيق هدف ما مثل الوصول الى الحد الأقصى للأرباح أو المشاركة .

ويمكن تمثيل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوى على متغيرين فقط بيانيا ، وعادة يكون الحل هو تقاطع مستقيمين .

مثال ٢-٢-٢ : تقوم إحدى الشركات بصناعة طرازين من الشبورات الكهربائية . أحدهما بسرعة واحدة ، والثاني بسرعةين .

ويوضح الجدول التالي متطلبات تصنيع الطرازين والطاقة الانتاجية المتاحة :

مساحة الترعيز (قدم مربع)	ساعات الاحبار	ساعات التجميع	ساعات التشغيل	الطراز
1.0	0.5	1.5	2.0	في سرعة واحدة
1.0	1.0	1.0	2.5	في سرعتين
30 000	14 000	24 000	40 000	المطبعة

والمطلوب :

(أ) استخدام الرسم البياني لحل مسألة جعل الأرباح تصل إلى الحد الأقصى مع الأخذ في الاعتبار متطلبات ، وقيد الإنتاج المذكور أعلاه علما بأن الربح لكل وحدة هي £3 و £5 للشنيور ذي السرعة الواحدة ، وفي سرعتين على الترتيب . ويجب أن يوضح الرسم البياني المجال الممكن للحل .

(ب) إيجاد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل طراز والأرباح الناتجة والقيود الملزمة في الحل
(م م ت أ - الجزء الرابع - يونيو ١٩٧١)

الاجابة :

(أ) نفترض أن الشركة تصنع x من الشنيورات ذات السرعة الواحدة ، و y من الشنيورات ذات سرعتين . عندئذ تكون القيود كما يلي :

$$2x + 2.5y \leq 40\,000$$

$$1.5x + y \leq 24\,000$$

$$0.5x + y \leq 14\,000$$

$$x + y \leq 30\,000$$

أما الدالة التي نريد أن نجعلها تصل إلى الحد الأقصى فهي

$$C = 3x + 5y$$

وبشكل ٣-٢ : رسم بياني للمستقيمات

$$2x + 2.5y = 40\,000$$

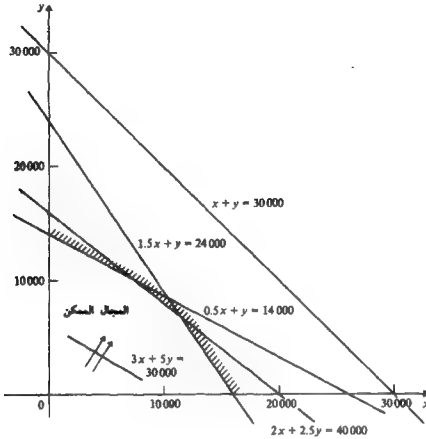
$$1.5x + y = 24\,000$$

$$0.5x + y = 14\,000$$

$$x + y = 30\,000$$

ومن هذا الرسم نجد أن حلول المسألة يجب أن تقع داخل ، أو على حدود الشكل الرباعي الذي تحده المستقيمات الثلاثة الأولى . (أما المستقيم الرابع فهو غير مؤثر) . وهذه المساحة هي المجال الممكن . والقيم الموجودة فيه فقط هي التي تحقق كل الاشتراطات . ولحل المسألة يجب أن نعتبر مستقيمات صورتها كما يلي :

$$3x + 5y = \text{ثابت}$$



شكل ٢-٣

ونجد من بينها ذلك المستقيم الذي تكون قيمة الثابت بالنسبة له أكبر ما يمكن مع وجود إحدى نقطة في المجال الممكن .

ولهذا الغرض نرسم أحد هذه المستقيمات بأية قيمة مناسبة للثابت (ولتكن 30 000 مثلا) ثم نضع على المستقيم مثلثا ونحركه موازيا لنفسه حتى يصل إلى الوضع الذي يكون فيه ملامسا بالكاد للمجال الممكن . وفي العادة سيحدث هذا التلامس عند أحد أركان المجال الممكن ، وهذا الركن هو الحل المطلوب .

(ب) في المثال المذكور. يكون الحل عند نقطة تقاطع المستقيمين .

$$\begin{aligned} 2x + 2.5y &= 40\,000 \\ 0.5x + y &= 14\,000 \end{aligned}$$

وهذان هما القيودان الملزمان .

ومن الرسم البياني نجد أن هذه النقطة تقع عند $x = 6667$ و $y = 10667$ ويمكن التحقق من الحل المباشر إليه بحل المعادلتين الآتيتين . وهكذا فإن السياسة التي تؤدي إلى جعل الأرباح تصل إلى الحد الأقصى هي إنتاج 6667 شنيورا بسرعة واحدة و 10667 شنيورا بسرعةين . والربح الناتج في هذه الحالة هو

$$£(3 \times 6667 + 5 \times 10\,667) = £73\,334$$

تعرين ٢-٢-٢ : تقوم إحدى الشركات بتشغيل وثقب نوعين من المسبوكات هما X و Y . والزمن اللازم لتشغيل وثقب المسبوكة الواحدة بما في ذلك زمن ضبط الماكينة هو كما يلي :

المسبوكة	ساعات التشغيل	ساعات الثقب
X	4	2
Y	2	5

ولدى الشركة مخزونان للتشغيل ، وثلاثة مثاقيب ، وساعات العمل في الأسبوع هي 40 ، ولا يوجد وقت ضائع ، كما أنه غير مسموح بالعمل وقتاً إضافياً . والتكاليف المتغيرة لنوعى المسبوكات هي £ 6 للمسبوكة Y . أما التكاليف الثابتة فهي £ 50 في الأسبوع .

لذا كان ثمن بيع المسبوكة X هو £ 15 للواحدة ، وثمن بيع المسبوكة Y هو £ 18 للواحدة علماً بأنه لا توجد حدود على عدد المبيعات من كل نوع من المسبوكات . وإذا كانت الشركة تريد تحقيق الحد الأقصى من الأرباح فإنها تحتاج إلى :

(١) وضع النموذج الكامل للبرمجة الخطية لهذه المسألة .

(٢) حل المسألة بالرسم البياني .

(م م ت أ - الجزء الرابع - نوفمبر ١٩٧٩)

وبالطبع ، فإن فكرة المعادلات الآتية لا تقتصر على حل معادلتين بهما متغيران فقط . ونفس المبدأ ينطبق على حل n من المعادلات تحتوى على n من المتغيرات مهما كانت قيمة العدد n . ولكن الحسابات تصبح صعبة إذا زاد العدد n على 3 وعملها فإن المعادلات التي تحتاج إلى حل عدد أكبر من المعادلات تحل بواسطة الكمبيوتر . ولكن ثلاث معادلات بها ثلاثة متغيرات لا تحتاج للجوء إلى الكمبيوتر . وستناول الآن بعض المسائل من هذا النوع . ولانتمثل المعادلات المختلفة في هذه الحالة مستقيمات كما في حالة المتغيرين ، وانما مستويات ، وحل مسألة تتضمن ثلاث معادلات آتية يعنى إيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة .

مثال ٢-٢-٣ : حل المعادلات التالية

$$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 7 \\ x + 3y - 2z &= 11 \\ 3x - y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

الاجابة :

$$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 7 & (٨ - ٢) \\ x + 3y - 2z &= 11 & (٩ - ٢) \\ 3x - y - 3z &= 4 & (١٠ - ٢) \end{aligned}$$

ويضرب (٩ - ٢) $\times 2$

$$2x + 6y - 4z = 22 \quad (١١ - ٢)$$

ويعطى (٨-٢) من (١١-٢)

$$10y - 5z = 15$$

(١٢-٢)

ويضرب (٩-٢) $\times 3$

$$3x + 9y - 6z = 33$$

(١٣-٢)

ويعطى (١٠-٢) من (١٣-٢)

$$10y - 3z = 29$$

(١٤-٢)

ويعطى (١٢-٢) من (١٤-٢)

$$2z = 14$$

$$z = 7$$

إذن

ويعمىض $z = 7$ فى المعادلة (١٢-٢)

$$10y = 15 + 5 \times 7 = 15 + 35 = 50$$

$$y = 5$$

إذن

ويعمىض $z = 7$ و $y = 5$ فى (٩-٢)

$$x = 11 - 3 \times 5 + 2 \times 7 = 11 - 15 + 14$$

$$x = 10$$

إذن

وهذا يعنى أن المعادلات الثلاثة تتحقق فى آن واحد إذا كانت $z = 7$ ، $y = 5$ ، $x = 10$

مثال ٢-٤ : نتج احدى الشركات ثلاثة منتجات x و y و z على ثلاثة أنواع مختلفة من الماكينات الموجودة فى ثلاثة أقسام A و B و C والطاقة الشهرية لإنتاج كل قسم محددة كما يلى :

القسم	ساعات تشغيل الماكينات
A	1800
B	2100
C	1300

علما بأن الماكينات متخصصة ، وكل نوع منها يقوم بوظيفته المحددة فقط . ويتم تصنيع كل منتج فى الأقسام الثلاثة مما يستغرق أوقاتا مختلفة كما يلى :

المنتج	الوقت		
	A	B	C
عدد ساعات التشغيل للوحدة			
x	2	6	1
y	2	1	3
z	3	2	2

وقد طلب من المشرف على ضبط الإنتاج أن يحقق أعلى استخدام لطاقة كل الماكينات .

احسب عدد وحدات المنتجات الثلاثة x و y و z التى يجب إنتاجها حتى تتم الاستفادة الكاملة من طاقة كل قسم شهريا .

(ممت أ - الجزء الأول نوفمبر ١٩٧٥)

الإجابة : لنفرض أن الشركة قررت أن تنتج x و y و z من المنتجات الثلاثة شهرياً عندئذ فإن المعادلات التي يجب أن تتحقق هي :

$$2x + 2y + 3z = 1800$$

(١٥-٢)

$$6x + y + 2z = 2100$$

(١٦-٢)

$$x + 3y + 2z = 1300$$

(١٧-٢)

ويضرب (١٧-٢) $\times 2$

$$2x + 6y + 4z = 2600$$

(١٨-٢)

ويطرح (١٥-٢) من (١٨-٢)

$$4y + z = 800$$

(١٩-٢)

ويضرب (١٧-٢) $\times 6$

$$6x + 18y + 12z = 7800$$

(٢٠-٢)

ويطرح (١٦-٢) من (٢٠-٢)

$$17y + 10z = 5700$$

(٢١-٢)

ويضرب (١٩-٢) $\times 10$

$$40y + 10z = 8000$$

(٢٢-٢)

ويطرح (٢١-٢) من (٢٢-٢)

$$23y = 2300$$

اذن

$$y = 100$$

وبتعويض $y = 100$ في المعادلة (١٩-٢)

$$z = 800 - 4 \times 100 = 800 - 400$$

$$z = 400$$

أي إن

وبتعويض $y = 100$, $z = 400$ في المعادلة (١٧-٢)

$$x = 1300 - 3 \times 100 - 2 \times 400$$

$$= 1300 - 300 - 800$$

$$x = 200$$

أي أن

وهذا يعني أن المشرف على ضبط الإنتاج سيتمكن من تحقيق الاستخدام الكامل للطاقة الانتاجية المتاحة إذا تم إنتاج 200 وحدة من المنتج x و 100 وحدة من المنتج y و 400 وحدة من المنتج z .

تمرين ٣-٢-٢ : حل مجموعة المعادلات التالية :

$$p + q + 2v = 6$$

$$p - q + v = 2$$

$$2p + q = 3$$

(ممت أ- الأساس ب- مايو ١٩٧٩)

٣-٢ المتحنى من الدرجة الثانية

سنبدأ هذا الموضوع بدراسة المثال التالي :

وجلت إدارة إحدى الشركات أن دخل المبيعات كدالة لعدد الوحدات المباعة بتبع المعادلة التالية في المدى بين

80 , 30 وحدة مباعة :

دخل المبيعات (£) = $20 \times$ (عدد الوحدات المباعة) - $0.15 \times$ (عدد الوحدات المباعة)
في حين تتبع جملة التكاليف المعادلة التالية :

$$\text{جملة التكاليف (£)} = 450 + 2 \times (\text{عدد الوحدات المباعة})$$

ارسم رسما بيانيا يوضح الخطوط الممثلة للدخل والتكاليف .

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

معادلة التكاليف معروفة لدينا ، فهي من النوع الخطي الذي سبقت لنا دراسة في البند ٢ - ١ . أي أنها على الصورة

$$y = a + bx$$

حيث y جملة التكاليف و x عدد الوحدات المباعة و a تساوي 450 و b تساوي 2 . وهكذا ، فإننا نعلم أن الرسم البياني لجملة التكاليف عبارة عن مستقيم يقطع 450 من محور y ويميله يساوي 2 .

أما معادلة الدخل فهي مختلفة نوعا . فهي تتضمن حدا يدخل فيه المقدار x^2 (عدد الوحدات المباعة) . ويمكن توقيع الرسم البياني لهذه المعادلة بنفس الطريقة التي توقع بها الرسم البياني للمعادلات الخطية الموضحة في البند ٢ - ١ ، أي بأخذ مجموعة من القيم لمتغير « عدد الوحدات المباعة » وحساب القيم المقابلة « لدخل المبيعات » وتوقيع كل زوج من القيم ، وتوصيل النقاط . ويتم التوصيل بواسطة منحنى أملس بقدر الامكان .

وفي المثال المعنى نوجد القيم التالية :

عدد الوحدات المباعة	30	40	50	60	70	80
« عدد الوحدات المباعة »	900	1600	2500	3600	4900	6400
« عدد الوحدات المباعة » $\times 20$	600	800	1000	1200	1400	1600
« عدد الوحدات المباعة » $\times 0.15$	135	240	375	540	735	960
دخل المبيعات	465	560	625	660	665	640

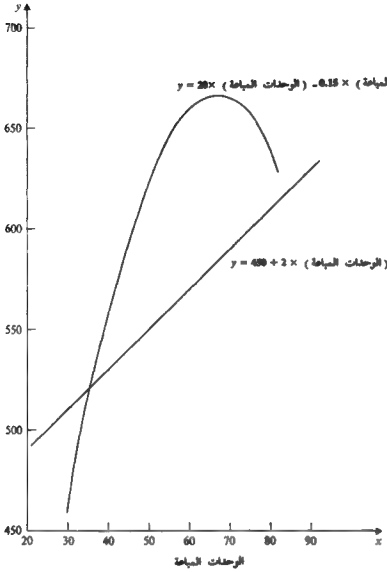
والرسم البياني الذي نحصل عليه من هذا الجدول موضح بشكل (٢ - ٤) . كما وضعنا بالشكل الرسم البياني لمعادلة التكاليف وهو منحنى مستقيم .

ويسمى الرسم البياني لدخل المبيعات منحنى من الدرجة الثانية (أو قطع مكافئ) ومثل هذا المنحنى يرتبط دائما بمعادلة على الصورة .

$$y = ax^2 + bx + c$$

حيث a و b و c ثوابت . وهذا هو الشكل العام لمعادلة منحنى الدرجة الثانية . وبالنسبة للمثال المعطى ، فإن $a = -0.15$ ، $b = 20$ ، $c = 0$ حيث y تمثل دخل المبيعات و x تمثل عدد الوحدات المباعة .

ولكل منحنى من الدرجة الثانية نهاية عظمى واحدة (كما في المثال المعطى) ، أو نهاية صغرى واحدة وتقابلنا هذه الحالة الأخيرة عندما يكون المعامل a المضروب في الحد المربع موجبا . وبالفصل الخامس استكمال لدراسة نقط النهاية العظمى والصغرى . وتتوقف حدة النهاية العظمى والصغرى على القيم النسبية للثابتين a و b وهما معامل الحد المربع ، والحد الخطي على الترتيب . وفي مثالنا يصبح دخل المبيعات صفرا إذا كان عدد الوحدات المباعة صفرا ، وهكذا فإن المنحنى يمر بنقطة تقاطع المحاور . وبصفة عامة قد يكون هناك ثابت c يمثل الجزء الذي يقطعه المنحنى من المحور الرأسى .



شكل ٢-١

ونلاحظ أنه عند تقاطع المنحنى مع المحور الأفقى يكون :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

وبالتالى فإن قيمتي x عند نقط التقاطع تكون هي حلا معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$.

تمرين ٢-٣-١ : ارسم الشكل البياني للمعادلة $y = x^2 - 6x + 9$ فى المدى من $x = 1$ الى $x = 5$ ثم اوجد حل المعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$ من الرسم البياني .

(م م أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

وهناك كثير من المواقف - وسنرى أمثلة لبعضها فى الفصل الثالث - التى تتطلب حل معادلة من الدرجة الثانية . وليس أسلوب الرسم البياني أفضل الطرق لحل هذه المعادلات عمليا .

وهناك طريقتان لحل معادلات الدرجة الثانية : بالتحليل إلى عوامل أو باستخدام قانون حل معادلة الدرجة الثانية . والطريقة الأولى هي الأسرع والأسهل إذا أمكن استخدامها ، ولانصح بالاجراء إلى القانون إلا كحل أخير . ولتوضيح طريقة التحليل إلى عوامل نقوم بحل المثال التالي :

$$\text{حل المعادلة } 2x^2 - 5x - 2 = 0$$

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٣)

إذا أخذنا كتابة المعادلة في الصورة القياسية لمعادلات الدرجة الثانية فإنها تصبح .

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

وتتطلب عملية التحليل إلى عوامل التعبير عن الطرف الأيسر للمعادلة كحاصل ضرب عاملين كل منهما في الصورة $ax^2 + bx + c$ أي أنه خطي بالنسبة لـ x .

ولكى يكون حاصل الضرب مساويا للصفر ، فلا بد أن يكون أحد العاملين مساويا للصفر . وهكذا نحصل على معادلتين خطيتين يمكن حلها لإيجاد قيمة x . وحلا هاتين المعادلتين هما قيمتا x عند تقاطع المنحنى مع محور x .

ويمكن بالتمرين التمرس على إيجاد العاملين إذا كان ذلك ممكنا وكتابة المعادلة فورا في صورة حاصل ضرب عاملين . ولكننا سنشرح فيما يلي طريقة لإيجاد العوامل إذا كان ذلك ممكنا ، وهذه الطريقة طويلة إلى حد ما ، ولكنها فعالة في الوصول إلى العوامل إذا كانت موجودة .

وعلى سبيل المثال ، فإن المعادلة السابقة محللة إلى عواملها تأخذ الصورة :

$$(x - 2)(2x - 1) = 0$$

ويمكن التحقق من ذلك بفك الأقواس .

وبالتالي ، فإننا نحصل على حل المعادلة بحل المعادلتين الخطيتين $2x - 1 = 0$ أي إن $x = 0.5$ ، $x - 2 = 0$ أي إن $x = 2$ ، وهكذا ، فإننا لو رسمنا المنحنى $y = 2x^2 - 5x + 2$ سنجد أنه يقطع محور x عند النقطتين $x = 2$ ، $x = 0.5$.

للوصول إلى صورة المعادلة المحللة إلى عاملين نجري الخطوات التالية . نجد عددين مجموعهما هو معامل x (وهو في هذه الحالة - 5) وحاصل ضربيهما هو حاصل ضرب الحد الثابت في معامل x^2 (وهو في هذه الحالة $4 \times 2 = 8$) (فلذا لم نستطع إيجاد مثل هذين العددين نترك طريقة التحليل إلى العوامل ، ونستعمل القانون) والمعدنان المناسبان في حالتنا هما - 4 ، - 1 .

وبعد ذلك نعيد كتابة المعادلة مع تقسيم الحد المحتوي على x إلى جزئين باستخدام العددين . وفي هذه الحالة نحصل على $2x^2 - 4x + 2 - x - 1 = 0$ ثم نأخذ أكبر عامل مشترك من الزوج الأول من الحدود ومن الزوج الثاني . لاحظ أن أكبر عامل مشترك يمكن استخراجه من العددين الثانيين قد يكون الوحدة . وفي المثال المعطى ، فإن العاملين هما $x - 2$ ، $2x - 1$ على الترتيب وهكذا نحصل على

$$x(2x - 1) - 2(2x - 1) = 0$$

ونتيجة لطريقة تقسيم الحد المحتوى على x فإن هذه الطريقة تعطي دائما حدين بهما عامل مشترك . وفي هذه الحالة ، فإن العامل المشترك هو $2x - 1$. وباستخراج هذا العامل المشترك تنتهي عملية التحليل الى عوامل ، فنحصل على

$$(x - 2) (2x - 1) = 0$$

وهي نفس النتيجة المعطاه اعلاه

$$\text{مثال ٢-٣-١ : حل المعادلة } 6x^2 = 13x - 5 = 0$$

الاجابة المبدان اللذان يساوى مجموعهما 13 وحاصل ضربهما 30 - هما 15 و 2 - وهكذا نكتب المعادلة

$$6x^2 + 15x - 2x - 5 = 0$$

ثم نأخذ اكبر عامل مشترك من الحدين الأولين ، ومن الحدين الآخرين ، فنحصل على :

$$3x (2x + 5) - 1 (2x + 5) = 0$$

وباستخراج العامل المشترك

$$(3x - 1) (2x + 5) = 0.$$

وهكذا ، فإن حلى المعادلة يعطيان بالمعادلتين

$$3x - 1 = 0 \text{ أى } x = 1/3$$

$$\text{و } 2x + 5 = 0 \text{ أى } x = -2.5$$

$$\text{تمرين ٢-٣-٧ : حل المعادلة } 8x^2 - 26x + 11 = 0$$

وقد درسا في تمرين سابق بهذا الجزء المعادلة

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

وعند تحليل هذه المعادلة إلى عاملها نحصل على

$$(x - 3)^2 = 0$$

وهذا يعنى أنه في هذه الحالة لا يوجد إلا حل واحد للمعادلة ، وهو $x = 3$ ومن الرسم البياني نجد أن منحني الدرجة الثانية يمس محور x فى نقطة واحدة بدلا من أن يقطع فى نقطتين .

فلذا نعد التحليل إلى عوامل لاستحالة إيجاد العوامل ، أو لأننا لم نتمرس بالدرجة الكافية على إيجادها ، فإنا نوجد الحل باستخدام قانون معادلة الدرجة الثانية . ويقرر هذا القانون أن المعادلة .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

لها الحلان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ونحصل على أحد الحدين باختيار علامة « الزائد » التى فى البسط ، ونحصل على الحل الثانى باختيار علامة « الناقص » .

مثال ٢-٣-٢ : حل المعادلة $3x^2 + 5x - 15 = 0$

الاجابة : ليس من الممكن إيجاد عددين مجموعهما 5 ، وحاصل ضربهما 45 - ولهذا نلجأ إلى القانون وطبقا له ، فإن حلى المعادلة هما

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-15)}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{205}}{6} = \frac{-5 \pm 14.318}{6}$$

الإشارة الموجبة تعطى القيمة $x = 1.553$ ، والإشارة السالبة تعطى القيمة $x = -3.220$ وهذه هي قيم x التى تقطع عندها منحنى الدرجة الثانية $y = 3x^2 + 5x - 15$ محور x .

تمرين ٢-٣-٣ : حل المعادلة $13x^2 + 7x - 8 = 0$
لاحظ أنه عند تطبيق القانون على المعادلة

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

فإن المقدار $b^2 - 4ac$ الموجود تحت الجذر يساوى صفرا .

وبالتالى ، فإن الحلين المقابلين للإشارة الموجبة والسالبة ينطبقان . ويمكن القول بأنه إذا كان المنحنى من الدرجة الثانية يسمى محور x فى نقطة واحدة ، فإن $b^2 - 4ac = 0$.

والطبع توجد معادلات من الدرجة الثانية يقل فيها المقدار $b^2 - 4ac$ عن الصفر وعلى سبيل المثال

$$3x^2 + 5x + 15 = 0$$

وكذلك المعادلة

$$-x^2 + 2x - 7 = 0$$

وبالنسبة لعلم الحساب العادى لا يوجد جذر تربيعى لمقدار سالب ، ولهذا لا يمكن حساب $b^2 - 4ac$ ولذلك فإن القانون لا يمكننا من إيجاد أية حلول لأنها غير موجودة أصلا . وعلى الرسم البياني ، فإن هذا يعنى منحنيات من الدرجة الثانية لا تقطع ولاتمس محور x اطلاقا . وبين شكل (٢-٥) الرسم البياني للمعادلتين $y = 3x^2 + 5x + 15$ و $y = -x^2 + 2x - 7$.

ومع أن تعبير « المعادلات الآتية » يستخدم أكثر بالنسبة للمعادلات الآتية الخطية إلا أن نفس الفكرة الأساسية يمكن أن تطبق على مجموعات من المعادلات من الدرجة الثانية ، أو خليط من المعادلات الخطية ومعادلات الدرجة الثانية . ويمكن استخدام نفس طرق الحل . أى أنه يمكن حل المعادلات بواسطة الرسم البياني بإيجاد نقط تقاطع المنحنيات ، كما يمكن الحل بتجميع المعادلات بطريقة تؤدى إلى استبعاد المتغيرات الواحد تلو الآخر حتى يتبقى أحدها فقط حيث تحل المعادلة لإيجاد قيمته ، ثم يتم التعويض بهذه القيمة للوصول إلى باقى المتغيرات . وسنختتم هذا الجزء ببعض الأمثلة والتمارين على ذلك .

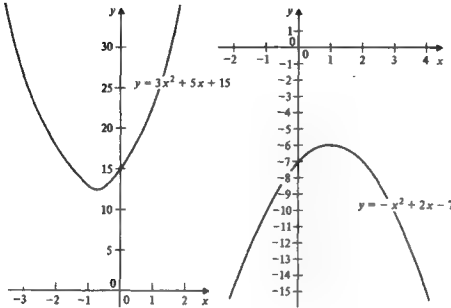
مثال ٢-٣-٣ : تقوم إحدى الشركات بإنتاج منتج واحد . وتباع وحدة المنتج بمبلغ £ 15 وتكاليف التشغيل كما يلى :

تكاليف ثابتة أسبوعية .	800
تكاليف متغيرة لكل وحدة مصنعة .	5

كما أن هناك تكاليف للصيانة طبقاً للمعادلة .

$$M = 0.009x^2$$

حيث x عدد الوحدات المنتجة أسبوعياً .



شكل ٢-٥

والمطلوب :

- (أ) حساب مدى الانتاج الممكن بوحدة صحيحة بحيث لا يتبقى وحدات غير مشغطة في نهاية الأسبوع ، وبحيث لا يقل الربح الأسبوعي عن £ 200 .
 (ب) توضيح الإجابة على الجزء (أ) برسم بياني لمعادلة الربح .
 (م م أ - الأساس ب - مايو ١٩٨٠)

الإجابة :

- (أ) الدخل الأسبوعي هو $15x$
 والتكاليف الأسبوعية الكلية تساوى $800 + 5x + 0.009x^2$ ، وبالتالي ، فإن الربح الأسبوعي .

$$y = 15x - (800 + 5x + 0.009x^2)$$

أى أن

$$y = -0.009x^2 + 10x - 800$$

وبالتالى ، فإن الربح يساوى £ 200 إذا كان

$$-0.009x^2 + 10x - 800 = 200$$

أو

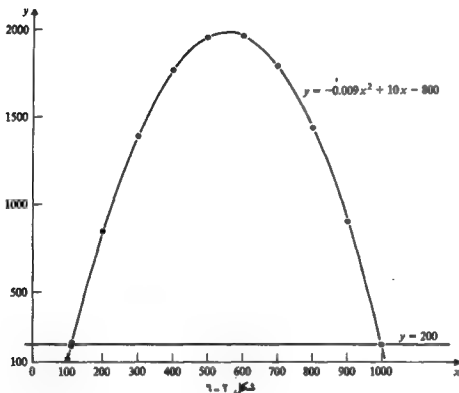
$$-0.009x^2 + 10x - 1000 = 0$$

ولما كان معامل x^2 سالبا ، فإن لدينا منحنيا من الدرجة الثانية له نهاية عظمى وبالتالي فإن الربح سيزيد من 200 £ لقيم x الواقعة بين حلي المعادلة المذكورة أعلاه . ويمكن إيجاد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضربهما 9 وهذان العددان هما 1,9 ، وهكذا نستطيع التحليل إلى عاملين باعادة كتابة المعادلة كما يلي :

$$-0.009x^2 + x + 9x - 1000 = 0$$

ويمكن اختصار هذه المعادلة الى

$$x(-0.009x + 1) - 1000(-0.009x + 1) = 0$$



شكل ٦-٢

وبالتالي فإن $(x - 1000)(-0.009x + 1) = 0$

وهذا يعنى أن الحلين هما : $x = \frac{1}{0.009} = 111.111$ and $x = 1000$

وهكذا ، فإن عدد الوحدات التي يلزم انتاجها لتحقيق ربح 200 £ على الأقل يقع فى المدى من 112 الى 1000 شاملا هذين الرقمين .

(ب) انظر قيم دالة الربح المعطاه بالجدول المعطى فى الصفحة التالية .

وبين شكل (٦-٢) الرسم البياني لهذه الدالة . ونقط نهاية المدى المطلوبة فى الجزء (أ) هى نقط تقاطع هذا المنحنى مع المستقيم $y = 200$.

مثال ٢-٣-٤ : مستطيل محيطه 114 مترا ومساحته 800 مترا مربعا . أوجد بعديه .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

٢- الرياضيات والاحصاء

x	100	111	112	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$-0.009x^2$	-90	-110.9	-112.9	-360	-810	-1440	2250	-3240	-4410	-5760	-7290	-9000
$10x$	1000	1110	1120	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800	-800
$y = -0.009x^2 +$												
$10x - 800$	110	199.1	207.1	840	1390	1760	1950	1960	1790	1440	910	200

الاجابة : لنفترض أن بعدي المستطيل هما : x, y
عندئذ تكون المعادلتان اللتان يلزم حلها هما :

$$2x + 2y = 114 \quad (٢-٢٣)$$

$$xy = 800 \quad (٢-٢٤)$$

ومن المعادلة (٢-٢٣) نحصل على

$$x + y = 57$$

أى أن

$$y = 57 - x$$

وبتعويض هذه القيمة فى المعادلة (٢-٢٤) يصبح لدينا :

$$x(57 - x) = 800$$

وبالتالى فإن

$$x^2 - 57x + 800 = 0$$

$$(x - 25)(x - 32) = 0$$

ويكون بعدا المستطيل 25 مترا ، 32 مترا .

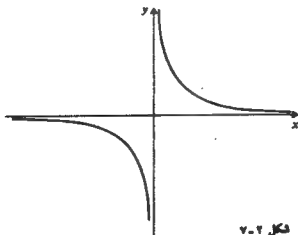
وبذا يكون حل المسألة متبها ، ومع ذلك ، فمن المفيد أن نشكر فى حلها بالرسم البيانى .

والمعادلة (٢-٢٣) هى بالطبع معادلة خط مستقيم . أما المعادلة (٢-٢٤) فهى معادلة قطع زائد قائم . وهذا المنحنى له عافة معادلة فى الصورة

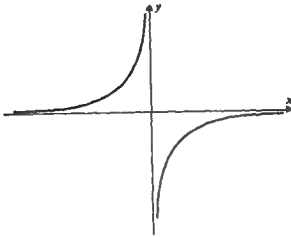
$x \cdot y = \text{ثابت}$

والرسم البيانى لها يكون بالصورة الموضحة بشكل (٢-٧) (إذا كان الثابت موجبا) أو بشكل (٢-٨) (إذا كان الثابت سالبا) .

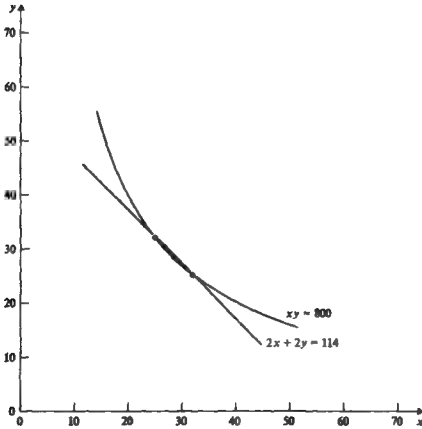
وبالمثال المذكور ، فإن الثابت موجب ، ونحن نبحث عن تقاطع المستقيم $2x + 2y = 114$ مع القطع الزائد $xy = 800$. ويحدث التقاطع عند النقطتين $x = 25, y = 32$ و $x = 32, y = 25$ ، كما هو موضح بشكل (٢-٩) .



شكل ٢-٧



شكل ٢-٨



شكل ٢-٩

مثال ٢-٣-٥

(أ) ارسم الشكل البياني للمعادلتين .

$$2x + y = 8$$

$$y = x^2 - 2x + 4$$

لقيم x الواقعة من -2 إلى +4 شاملة هاتين القيمتين .

(ب) من الرسم البياني حدد نقط تقاطع المعادلتين ، ثم أثبت دقة الرسم البياني بحل المعادلتين آنيا .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

الاجابة :

(أ) يمكن اعادة كتابة المعادلتين كما يلي :

$$y = 8 - 2x$$

$$y = x^2 - 2x + 4$$

وبيين الجدولان التاليان القيم المحسوبة من المعادلتين

x	-2	-1	0	1	2	3	4
8	8	8	8	8	8	8	8
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
$y = 8 - 2x$	12	10	8	6	4	2	0

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
4	4	4	4	4	4	4	4
$y = x^2 - 2x + 4$	12	7	4	3	4	7	12

وبيين شكل (٢-١٠) الرسم البياني لهاتين المعادلتين .

(ب) يتقاطع الرسمان البيانيان عند $x = -2$ و $x = +2$ ويمكن حل المعادلتين آنيا بالتعويض بقيمة $y = 8 - 2x$ من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية . وهذا سيعطى .

$$8 - 2x = x^2 - 2x + 4$$

وبالتالى ، فإن

$$x^2 = 4$$

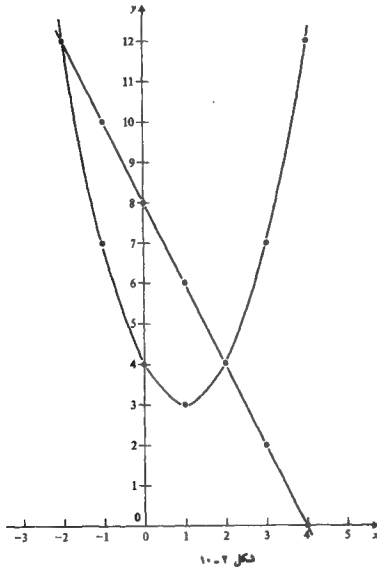
ومنها نوجد

$$x = \pm 2$$

وهذا يؤكد تقاطع المعادلتين ، كما سبق لإيجاده بطريقة الرسم البياني .

تمرين ٢-٤ : عددان موجبان الفرق بينهما 5 ومجموع مربعيهما 193 ما هما العددان ؟

(م م ت ١ - الأساس ب : نوفمبر ١٩٧٨)



٢-٤ المنحنيات اللوغاريتمية والأسية

قبل ظهور الحاسبات الالكترونية كانت اللوغاريتمات وسيلة مريحة وشائعة لإجراء عمليات الضرب والقسمة المعقدة . وكانت طريقة إجراء الضرب مثلا هي إيجاد لوغاريتمات الأرقام التي يراد ضربها من الجداول ، ثم تجمع هذه اللوغاريتمات ثم يبحث عن اللوغاريتم العكسي للمجموع في الجداول . وهكذا فإن عملية الضرب تستبدل بعملية أبسط وهي الجمع .

مثال ٢-٤-١ : أوجد حاصل الضرب 3.832×427.5 باستعمال اللوغاريتمات
الاجابة :

$$\log 3.832 = 0.5834$$

$$\log 427.5 = 2.6309$$

مجموع هذين اللوغاريتمين هو 3.2143 وبالبحت عن اللوغاريتم العكسي نجد أن

$$\text{Antilog } 3.2143 = 1638$$

وهكذا فإن هذه الطريقة تعطينا $3.832 \times 427.5 = 1638$.

والفكرة فى هذه الطريقة هى أننا عندما نبحت عن لوغاريتم أحد الأعداد فإننا فى الواقع نمير عن الرقم بدلالة قوة لرقم متفق عليه يسمى الأساس . وأكثر الجداول الشائعة الاستخدام للحساب باللوغاريتمات تستخدم الأساس 10 ، وهذا يعنى أنه فى المثال السابق

$$427.5 = 10^{2.6309} \quad \text{و} \quad 3.832 = 10^{0.5834}$$

وبالتالى فإن

$$3.832 \times 427.5 = 10^{0.5834} \times 10^{2.6309}$$

ولما كانت القوى المختلفة لنفس العدد تضرب فى بعضها يجمع الأسس ، فإن حاصل الضرب المطلوب يكون $10^{(0.5834+2.6309)} = 10^{3.2143}$

وبالمثال ، فإن قسمة عدد على عدد آخر تجرى بإيجاد الفرق بين لوغاريتميهما ثم البحث فى الجداول عن اللوغاريتم العكسي للفرق .

ومع أن الحاسبات الالكترونية الآن قد انتضت معها الحاجة إلى اللوغاريتمات لإجراء الحسابات من النوع المشار إليه أعلاه ، إلا أن مبدأ اللوغاريتم يظل هاما فى عدد من المواقف . وستناول واحدا من تلك المواقف فى الفصل الثالث . عندما سنستخدم قانونا للفائدة المركبة لحساب عدد الدفعات المطلوبة * (انظر المثال ٣-٣-٤) . ويظهر المجهول * فى هذا النوع من المسائل على شكل أس لعدد ما ، ويلزم استخدام اللوغاريتمات للحصول على معادلة خطية فى * . كما ستصادف تطبيقا آخر فى الفصل السابع حيث سنشرح الرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية كأسلوب لعرض بعض الأنواع من البيانات (انظر البند ٧-٣) . كما أن هناك تطبيقات أخرى فى السلاسل الزمنية حيث يمكن تحويل نموذج قائم على عملية ضرب إلى نموذج قائم على عملية جمع بواسطة اللوغاريتمات ، وفى الانحدار حيث يمكن تحويل المتغيرات المتصلة بعلاقة ضرب إلى متغيرات متصلة بعلاقة خطية بأخذ اللوغاريتم .

وستناول الآن مثالا يتضمن لوغاريتمات للأساس 10 ويليهِ تمرين للفرق . والقواعد الأساسية فى هذا النوع من

المسائل هى

$$\log (uv) = \log u + \log v$$

$$\log (u^v) = v \log u$$

مثال ٢-٤-٢ : إذا كان $11^{2x+8} = 50 (8^{4x})$ أوجد قيمة x .

الإجابة : يأخذ لوغاريتمات للطرفين نحصل على

$$\begin{aligned}(2x + 8) \log 11 &= \log 50 + \log (8^{4x}) \\ &= \log 50 + 4x \log 8\end{aligned}$$

أي أن

$$2x \log 11 + 8 \log 11 = \log 50 + 4x \log 8$$

ومن هنا نصل إلى

$$(2 \log 11 - 4 \log 8)x = \log 50 - 8 \log 11$$

أي أن

$$\begin{aligned}x &= \frac{\log 50 - 8 \log 11}{2 \log 11 - 4 \log 8} = \frac{1.698\ 97 - 8.331\ 14}{2.082\ 79 - 3.612\ 36} \\ &= \frac{-6.632\ 17}{-1.529\ 57} = 4.336\end{aligned}$$

تعيين ٢-٤-١ : إذا كان $(0.125)^n = 0.5946$ أوجد قيمة n

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٥)

ويمكن رسم المنحنى اللوغاريتمى $y = \log x$ بنفس الطريقة التى رسمنا بها الخطوط المستقيمة ، والمنحنيات من الدرجة الثانية فى الأجزاء (١-٢) و (٣-٤) على الترتيب . وهذا يعنى اختيار مجموعة من قيم x وحساب القيم المقابلة لـ y . ثم توقيع النقط وتوصيلها بمنحنى أملس . ويلاحظ أنه لا يمكن حساب $\log x$ إذا كانت x سالبة حيث أنه لا يوجد أس يمكن رفع العدد 10 إليه لتكون النتيجة عددا سالبا .

وبين شكل (١١-٢) المنحنى اللوغاريتمى $y = \log x$

واللوغاريتمات للأساس 10 هى الأكثر شيوعا ، ولها جداول متكاملة . ومع ذلك ، فإن نفس المبدأ ينطبق مهما كان أساس اللوغاريتم . وعند استخدام أساس آخر غير 10 فإن الأساس المستخدم يكتب أسفل كلمة "log" فإذا لم يكن الأساس مكتوبا ، فهذا يعنى أنه 10

مثال ٢-٤-٣ : إذا كان $\log_{20} 34 = 2$ فما هى قيمة x ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٤)

الإجابة : السؤال يعنى أن الأس الذى يجب رفع x إليه للحصول على 20.34 هو 2 وهكذا ، فإن

$$20.34 = x^2$$

ومن هنا نستنتج أن

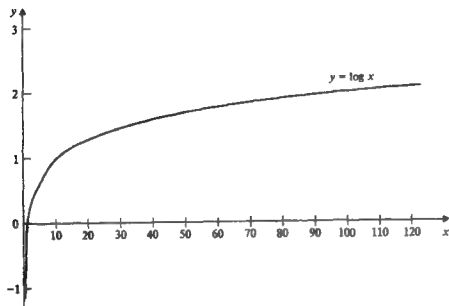
$$x = \sqrt{20.34} = 4.51$$

تمرين ٢-٤-٧ : ارسم الرسم البياني للمعادلة $y = 2^x$ لقيم x من 4- إلى 4+ ثم لوجد من الرسم البياني

(أ) $2^{2.5}$

(ب) $\log_2 6$

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)



شكل ٢-١١

والأساس الوحيد للوغاريتمات الذي يشيع استخدامه بالإضافة إلى الأساس 10 هو الأساس e . واستخدام هذا الرقم (وقيمته $e = 2.71828....$) كأساس للوغاريتمات مفيد لأن له خواص معينة متعلقة بالتفاضل (انظر الفصل الخامس)، وكثيرا ما يظهر هذا الرقم في حلول المعادلات التفاضلية. وسنعود إليه مرة أخرى في الفصل الثالث عشر عند الحديث عن توزيع بواسون، والتوزيع الطبيعي للاحتمالات.

ومن الممكن الإشارة إلى اللوغاريتمات ذات الأساس e باستخدام الرمز \log_e ، ولكن هذا النوع من اللوغاريتمات هام بدرجة يستحق معها رمزا خاصا، وهو \ln . وتسمى هذه اللوغاريتمات أحيانا باللوغاريتمات الطبيعية، أو اللوغاريتمات النابيرية نسبة إلى عالم الرياضيات الاسكتلندي جون ناير الذي يرجع إليه فضل اختراعها. وتسمح كثير من الحاسبات الحديثة بحساب اللوغاريتمات للأساس 10 وللأساس e .

ويوضح شكل (٢-١٢) المنحنى $y = \ln x$.

والمنحنى الأسى بالمعنى العام هو أى منحنى له معادلة في الصورة $y = e^x$ حيث e مقدار ثابت. وهكذا، فإن المنحنى $y = 2^x$ الذي رسمناه في التمرين السابق هو مثال لمنحنى أسى. وكما يجب أن نكون قد لاحظنا من استخدام هذا المنحنى لحل الجزء (ب) من التمرين. فإن هذا المنحنى هو عكس منحنى اللوغاريتم للأساس 2.

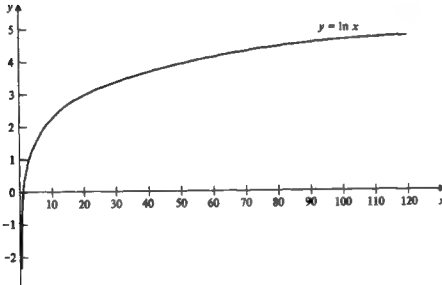
إذ أن $y = 2^x$ يعني أن $x = \log_2 y$.

وبالتالي ، فإن الدالة الأسية هي دالة اللوغاريتم العكس .

ولكن المصطلح « دالة أسية » يستخدم في أغلب الحالات بمعنى محدود يشير إلى الرقم e مرفوعا إلى الأس x ، أي $y = e^x$ وهذه هي دالة اللوغاريتم العكس لللوغاريتمات المأخوذة للأساس e . ويمكن إيجاد هذه الدالة من الجداول كما أنها موجودة في كثير من الحاسبات . ويبين شكل (١٣-٢) المنحنى $y = e^x$.

يشير إلى الدالة الأسية أحيانا باعتبارها دالة النمو . وتستخدم في وضع النماذج لتعداد السكان حيث يتناسب معدل النمو مع التعداد الحالي للسكان .

وستصادف تطبيقا ماليا للدالة الأسية في الجزء ٣-٣ عندما نتناول الفائدة المركبة مع استمرار التركيب .



شكل ١٣-٢

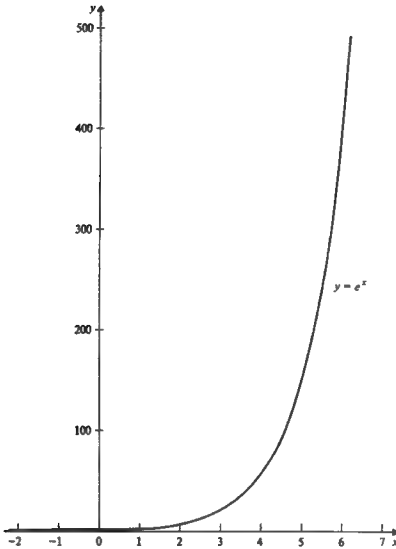
تمارين

١-٢ حل المعادلات التالية

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$$

$$\frac{11}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 11$$

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{y} - \frac{3}{z} = -3$$



شكل ٢-١٣

٢-٢ تقدر إدارة التسويق أنه إذا بيع المنتج A1 بسعر 40 £ للوحدة فستصل المبيعات إلى 400 وحدة أسبوعياً . أما إذا بيع بسعر 20 £ للوحدة فستصل المبيعات إلى 800 وحدة أسبوعياً . ويمكن اعتبار الرسم البياني لهذه الدالة خطياً . وتقدر إدارة الإنتاج أن التكاليف المتغيرة للإنتاج هي 7.50 £ للوحدة ، وأن التكاليف الثابتة ستكون 10 000 £ في الأسبوع :

- (أ) استنبط معادلات التكاليف ، ودخل المبيعات والربح .
- (ب) ارسم المعادلات الثلاث المستنبطة في (أ) بيانياً .
- (ج) من الرسم البياني قدر أقصى ربح يمكن الحصول عليه ، وأذكر عدد الوحدات المباعة ، وسعر البيع اللازم لتحقيق هذا الربح .

(م م أ - الأسس ب - مايو ١٩٧٦)

٢-٣ : إذا كانت نسبة $4 : 4 : -3 = 2 : y : x$ وإذا كان $8 = 3xy - 2y - 2x$ أوجد قيم x, y, z

(ممت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٦)

٢-٤ (أ) ارسم المنحنى التالي بيانيا

$$y = 120x - 0.322$$

(الصورة العامة : $y = ax^b$)

للقيم $x = 1, 2, 4, 25, 50, 100, 200$

(ب) إذا علم أن

y تمثل متوسط ساعات العمل المباشر لكل وحدة

a تمثل عدد ساعات العمل المباشر للوحدة الأولى

x تمثل العدد المجمع للوحدات المنتجة .

علق على الرسم البياني ، واقترح الأحوال التي يمكن فيها الاستعانة بمثل هذا الرسم البياني في الإدارة والمحاسبة (افترض على سبيل المثال أن الشركة تلقت طلبية لعدد من الوحدات الإضافية) .

(ممت أ - المهني ١ - مايو ١٩٧٩)

الفصل الثالث

الرياضة المالية

٣-١ المتواليات العددية

مبدأ المتواليات العددية مفيد لحل المسائل المالية التي تتضمن فائدة بسيطة ، أى فائدة تدفع للمستثمر بمجرد استحقاقه ولا تضاف إلى رأس المال ليربح بدورها في المستقبل .

مثال ٣-١ : قرر رجل أن يدخر ماله طبقاً لنظام يستثمر فيه في البداية 4000 £ ثم يستثمر كل سنة تالية مبلغ 1000 £ إضافية . وتجري كل الاستثمارات في أول يناير من كل عام . وتدفع الفائدة للمستثمر في ٣١ ديسمبر من كل عام بمعدل 12% من المبلغ المستثمر في أول العام .

وفيما يلي بعض الأسئلة التي يمكن أن تطرح بشأن هذا الموقف :

- ١- ماهي قيمة الفائدة التي ستدفع في نهاية السنة الخامسة ؟
- ٢- ماهو مجموع الفائدة المدفوعة في السنوات السبع الأولى ؟
- ٣- ما عدد السنوات التي يجب لهذا النظام من الاستثمار أن يستمر طوالها حتى تصبح جملة قيمة الفائدة المدفوعة 8640 £ .

ويمكن الإجابة على هذه الأسئلة كما يلي :

- ١- قيمة الفائدة المدفوعة في نهاية السنة الأولى هي $4000 \times 12\% = 480$ £ وفي كل سنة تالية ستزيد الفائدة المدفوعة على الفائدة في العام السابق بمقدار $1000 \times 12\% = 120$ £ . وهكذا فإن الفائدة المدفوعة في نهاية العام الخامس ستكون :

$$480 + 120 + 120 + 120 + 120 = 960$$

- ٢- مجموع الفائدة المدفوعة في السنوات السبع الأولى هو :

$$480 + 600 + 720 + 840 + 960 + 1080 + 1200 = 5880$$

- ٣- يمكن إيجاد الزمن اللازم لكي تصل جملة الفائدة المدفوعة إلى 8640 £ بجمع أرقام الفائدة المتتالية إلى مبلغ 5880 £ حتى نصل إلى 8640 £ .

$$£1200 + £120 = £1320 \text{ وبذلك بعد ٨ سنوات تكون الجملة } £5880 + £1320 = £7200$$

$$£1320 + £120 = £1440 \text{ وبذلك بعد ٩ سنوات تكون الجملة } £7200 + £1440 = £8640$$

وهكذا نجد أن جملة الفائدة المدفوعة تستصل إلى مبلغ £ 8640 في نهاية السنة التاسعة .

ولكن المسائل من هذا النوع يمكن أن تحل بكفاءة أكثر باستعمال مبدأ المتواليات العددية . ويمكن الحصول على متوالية عددية . متتابعة من الأعداد كل منها يختلف عن سابقة بمقدار ثابت . وعلى سبيل المثال : فإن الأعداد $17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$ تشكل متوالية عددية ، كما أن الأعداد التالية $74 + 79 + 84 + 89 + 94$ تشكل أيضا متوالية عددية .

وكذلك ، فإن جملة الفائدة المذكورة في حل الجزء الثاني من المثال السابق وتساوى $1200 + 1080 + 960 + 840 + 720 + 600 + 480$ هي أيضا متوالية عددية .

ويسمى المقدار الذي يختلف به كل حد في المتوالية عن الحد السابق « بالفرق المشترك » ويرمز لهذا الفرق عادة بالحرف d . وهكذا ففي المثال المالي المذكور أعلاه ، فإن $d = 120$ وهي الزيادة في فائدة كل عام عن العام السابق . وفي المثالين المذكورين أعلاه لدينا $d = 3$ ، $d = -5$ على الترتيب .

والصورة العامة لمتوالية عددية بها n من الحدود وحدها الأول a هي

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + [a + (n - 1)d]$$

لاحظ أن الحد الذي ترتيبه n في المتوالية عبارة عن

$$t_n = a + (n - 1)d$$

ويمكن استعمال هذه المعادلة لحل السؤال (١) بالمثال الأول . وفي هذه الحالة ، فإن رقم الربح للسنة الأولى هو $a = 480$ كما أن الفرق $d = 120$ والمطلوب معرفة الربح في السنة الخامسة ، أي عندما تكون $n = 5$. وهذا هو الحد الخامس في المتوالية ويساوى $480 + 4 \times 120 = 480 + 480 = 960$ ، فإن الربح الذي يدفع في نهاية السنة الخامسة هو كما أوجدنا سابقا £ 960 .

والآن لنرى كيف يمكن إيجاد مجموع متوالية عددية . ويمكن استخدام قانون التجميع الناتج لحل السؤال رقم (٢) بالمثال . ولو عبرنا عن مجموع n من الحدود بالرمز S_n

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 3)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \quad (١-٣)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة في الصورة

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 3)d] + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \quad (٢-٣)$$

وبجمع المعادلتين (١-٣) و (٢-٣) نحصل على

$$2S_n = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \dots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]$$

ومنها

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

وبالتالي ، فإن

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

وبالنسبة للجزء الثاني من المثال السابق ، فإن لدينا

$$n = 7, a = 480, d = 120$$

وبالتالي ، فإن

$$S_7 = \frac{7}{2} (2 \times 480 + 6 \times 120) = \frac{7}{2} (960 + 720) = \frac{7}{2} \times 1680$$

$$S_7 = 7 \times 840 = 5880$$

وهكذا ، فإن جملة الفائلة المدفوعة في السنوات السبع الأول هو : £ 5880 كما سبق أن أوجدناه بالطريقة المباشرة أعلاه .

ويمكن حل السؤال الثالث باستخدام قانون المجموع لإيجاد n بمعرفة S_n ، a ، d

$$S_n = 8640, a = 480 \text{ and } d = 120$$

$$8640 = \frac{n}{2} [2 \times 480 + (n-1) \times 120] \quad \text{وبالتالي فإن}$$

$$8640 = n [480 + (n-1) \times 60] \quad \text{أي أن}$$

$$8640 = n (420 + 60n)$$

$$144 = n (7 + n)$$

$$n^2 + 7n - 144 = 0 \quad \text{ومنها نصل إلى :}$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية ، وقد شرحنا طريقة حلها في الجزء (٢-٣) . وحل هذه المعادلة بالذات هما : $n = -9$ ، $n = 16$ والحل السالب لا معنى له بالنسبة لهذه المسألة . أما الحل $n = 9$ فمعنى أن جملة الفائلة المدفوعة سوف يصل إلى £ 8640 في نهاية العام التاسع ، كما سبق أن أوجدناه .

وفيما يلي بعض الأمثلة التي تستخدم قانوني المتواليات المنحنية بطرق مختلفة ولها عدد من التمارين للقراءة .

مثال ٣-١-٢ : ما هو الحد العاشر للمتتالية المنحنية التالية

$$30 + 39 + 48 + \dots ?$$

الاجابة : الفرق المشترك هو $9 = 39 - 30 = d$

وبذلك ، فإن الحد العاشر يساوي

$$t_{10} = 30 + (10 - 1) \times 9 = 30 + 9 \times 9 = 30 + 81 = 111$$

مثال ٣-١-٣ : أوجد مجموع المتوالية العددية الآتية حتى 12 حدا

$$6 + 21 + 36 + \dots$$

الإجابة : الفرق المشترك هو $d = 21 - 6 = 15$

وهكذا ، فإن مجموع المتوالية حتى 12 حدا يساوي

$$S_{12} = \frac{12}{2} (2 \times 6 + 11 \times 15) = 6 \times (12 + 165) = 6 \times 177 = 1062$$

مثال ٣-١-٤ : أوجد مجموع الأعداد الفردية الواقعة بين 20 , 50

الإجابة : البيانات المعطاة تدل على أن $a = 21$, $d = 2$ والحد الأخير هو 49

وفي البداية يجب أن نحدد عدد الحدود باستخدام قانون الحد الذي ترتيبه n

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$49 = 21 + (n - 1) \times 2$$

$$28 = 2 \times (n - 1)$$

$$n - 1 = 14$$

اذن :

ومنها نرى أن عدد الحدود $n = 15$

وبالتالي نستطيع أن نوجد المجموع المطلوب

$$S_{15} = \frac{15}{2} (2 \times 21 + 14 \times 2) = 15 \times (21 + 14) = 525$$

مثال ٣-١-٥ : أوجد الحد الأخير في متوالية عددية عدد حدودها 5 إذا كان الحد الأول 30 ومجموع المتوالية 310 .

الإجابة : المعلومات المعطاة هي أن $a = 30$, $n = 5$ والمجموع $S_5 = 310$ وفي البداية نستخدم قانون المجموع لنوجد الفرق المشترك d .

$$310 = \frac{5}{2} (2 \times 30 + 4 \times d)$$

$$310 = 5(30 + 2d)$$

$$310 + 2d = 62$$

أي أن :

ومنها نحصل على :

وبالتالي نستنتج أن $2d = 32$ ، أي أن $d = 16$

وهكذا ، فإن الحد الأخير

$$t_5 = 30 + 4 \times 16 = 30 + 64 = 94$$

مثال ٣-١-٦ : تحفظ شركة بمبلغ £ 100 من أرباحها في الشهر الأول ، وبمبلغ £ 120 في الشهر الثاني ، وتستمر في زيادة المبلغ الذي تحتفظ به بمقدار £ 20 كل شهر لمدة 36 شهرا . استخدم قانون المجموع لحساب اجمالي المبلغ الذي سيجتمع لدى الشركة في نهاية 36 شهرا .

الاجابة :

$$S_{36} = \frac{36}{2} (2 \times 100 + 35 \times 20) = 18(200 + 700) = 18 \times 900$$

وبالتالي ، فان المبلغ الذي سيجتمع في نهاية 36 شهرا هو £ 16 200 .

مثال ٣-١-٧ : حصل رجل على وظيفة بداية مربوطها £ 5000 ومقدار الملاوة السنوية £ 250 فلذا افترضنا ثبتت هذه الأرقام أوجد مايلي :

- ١ - المرتب في السنة السادسة
- ٢ - اجمالي المرتب الذي يحصل عليه الرجل في السنوات الثماني الأولى قبل الاستقاعات

الاجابة :

$$1. t_6 = 5000 + 5 \times 250 = 5000 + 1250 = 6250$$

- ١

أي أن المرتب في السنة السادسة يساوي £ 6250 .

$$2. S_8 = \frac{8}{2} (2 \times 5000 + 7 \times 250) = 4(10 000 + 1750) = 47000$$

- ٢

أي أن اجمالي المرتب الذي سيحصل عليه الرجل في السنوات الثماني الأولى يساوي قبل الاستقاعات £ 47 000

تمرين ٣-١-١ : ماهو الحد السادس عشر من المتوالية العددية .

$$40 + 38 + 36 + 34 + \dots ?$$

تمرين ٣-١-٢ : أوجد مجموع المتوالية العددية الآتية حتى 20 حدا .

$$13 + 18 + 23 + 28 + \dots$$

تمرين ٣-١-٣ : إذا كان الحد الأول من متوالية عددية هو 12 ومجموعها حتى 10 حدود هو 300 أوجد مجموع المتوالية حتى 18 حدا .

تمرين ٣-١-٤ : في أول يناير كان جون سميت مدينا بمبلغ £ 12 000 . وتخفيض المدونية وافق على أن يدفع مبلغ £ 1200 في نهاية كل ستة شهور مضاعفا اليها فالتد قديما 2½% على مبلغ الدين الباقي في بداية فترة الستة شهور . فلذا كان قانون مجموع المتوالية العددية ينص على أن

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

استخدم هذا القانون لإيجاد اجمالي الفائدة التي سيدفعها .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

٣-٢ المتواليات الهندسية

المتواليات الهندسية ذات أهمية كبرى لمجال عرض من المسائل المالية التي تتضمن فكرة الفائدة المركبة ، أي الفائدة التي تضاف الى رأس المال لتربح بدورها في المستقبل . وفي هذا الجزء سنتناول المتواليات الهندسية بصفة عامة ، وفي الأجزاء التالية من الفصل سنتناول الفائدة المركبة والتطبيقات المالية لفكرة المتواليات الهندسية .

نحصل على متوالية هندسية بإضافة متتابعة من الأعداد كل منها عبارة عن مضاعف ثابت لسابقة . وهكذا فإن الأعداد $224 + 112 + 56 + 28 + 14 + 7$ تشكل متوالية هندسية والأعداد $1 + 3 + 9 + 27 + 81$ تشكل متوالية هندسية .

والعامل الذي يضرب في كل عدد للحصول على العدد التالي يسمى « بالنسبة المشتركة » للمتوالية . وسنرمز لهذه النسبة k . وهكذا فإنه في المثال الأول أعلاه كانت $k = 2$ أما في المثال الثاني ، فإن $k = \frac{1}{3}$. وفيما يلي الصورة العامة لمتوالية هندسية بها n من الحدود والحد الأول منها هو a .

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^{n-1}$$

لاحظ أن الحد الذي ترتيبة n بالمتوالية

$$t_n = ak^{n-1}$$

وفي المثالين الواردين أعلاه ، فإن الحد الخامس من المتوالية الأولى يساوي

$$t_5 = 7 \cdot 2^4 = 7 \cdot 16 = 112$$

أما الحد الرابع من المتوالية الثانية فيساوي

$$t_4 = 81 \left(-\frac{1}{3} \right)^3 = 81 \left(-\frac{1}{27} \right) = -3$$

والآن سنرمز لمجموع n من الحدود من المتوالية الهندسية العامة بالرمز S_n . ويمكن إيجاد هذا المجموع كما يلي :

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^{n-2} + ak^{n-1} \quad (١-٣)$$

ويضرب طرفي هذه المعادلة في k نحصل على

$$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^{n-2} + ak^{n-1} + ak^n \quad (٢-٣)$$

$$(k-1)S_n = ak^n - a \quad (٢-٣) \text{ من } (١-٣) \text{ ويطرح}$$

$$(k-1)S_n = a(k^n - 1) \quad \text{وبالتالى ، فإن}$$

$$S_n = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$$

ومن هنا نوجد

وبالنسبة للمثال الأول أعلاه يكون لدينا

$$n = 6, a = 7, k = 2$$

وبالتالى ، فإن

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{7(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{7(64 - 1)}{1} \\ &= 7 \times 63 = 441 \end{aligned}$$

وبالنسبة للمثال الثانى لدينا

$$n = 5, a = 81, k = -\frac{1}{3}$$

وبالتالى ، فإن

$$S_5 = \frac{81[(-1/3)^5 - 1]}{(-1/3) - 1} = \frac{81(-1/243 - 1)}{-4/3} = 81 \times \left(-\frac{244}{243}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 61$$

ويمكن للمقارء مراجعة هاتين التيجين بالجمع المباشر . وفيما يلى بعض الأمثلة التى تستخدم قانونى المتوالات الهندسية بطرق مختلفة ، ثم بعض التمارين للمقارء .

مثال ٣-٧-١ : إذا كان الحد الثانى بمتوالية هندسية 24 وحدها الخامس 81 أوجد مجموع الحدود الأربعة الأولى .

الاجابة :

$$t_2 = ak^2 - 1 = ak = 24$$

$$t_5 = ak^5 - 1 = ak^4 = 81$$

إذن

$$\frac{ak^4}{ak} = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

وبالاختصار نحصل على $27/8 = k^3$ أى أن $k = 3/2$ ، ومنها نوجد

$$a = \frac{24}{3/2} = 16$$

وبالتالى ، فإن مجموع الحدود الأربعة الأولى هو :

$$S_4 = \frac{a(k^4 - 1)}{k - 1} = \frac{16[(3/2)^4 - 1]}{3/2 - 1} = \frac{16(65/16)}{(1/2)}$$

أى أن مجموع الحدود الأربعة الأولى يساوى 130 .

مثال ٣-٢-٧ : الحد الأول من متوالية هندسية هو 6 والحد الرابع 48 أوجد مجموع المتوالية لتسعة حدود .
الاجابة :

$$a = 6 \text{ و } t_4 = ak^{4-1} = ak^3 = 48$$

ومنها نوجد $8 = k^3$ أى أن $k = 2$

وبالتالى ، فإن مجموع تسعة حدود هو

$$S_9 = \frac{6(2^9 - 1)}{2 - 1} = \frac{6 \times 511}{1} = 3066$$

مثال ٣-٢-٨ : فى إحدى المتوالات الهندسية يزيد الحد الثانى على الحد الأول بمقدار 6 ويزيد الحد الثالث على الثانى بمقدار 9 أوجد مجموع المتوالية لخمس حدود .
الاجابة :

$$t_2 - t_1 = ak - a = 6$$

$$t_3 - t_2 = ak^2 - ak = 9$$

وبالقسمة نحصل على

$$\frac{a(k-1)}{ak(k-1)} = \frac{6}{9}$$

وبالتالى ، فإن $9 = 6k$ أى أن $k = 3/2$ ، كما أن

$$a = \frac{6}{3/2 - 1} = \frac{6}{1/2} = 12$$

وبالتالى ، فإن المجموع لخمس حدود هو

$$S_5 = \frac{12\frac{1}{2}((3/2)^5 - 1)}{3/2 - 1} = \frac{12(211/32)}{1/2} = \frac{12 \times 211}{16} = 158\frac{1}{4}$$

تمرين ٣-٢-١ : احسب الحد العاشر ومجموع التسعة حدود الأولى بالمتوالية

(م م ت أ - الأسنيس ب - مايو ١٩٧٧) $4 - 6 + 9 \dots$

تمرين ٣-٢-٢ : أوجد مجموع المتوالية الهندسية التالية لاثني عشر حدا

$$3 + 6 + 12 + 24 + \dots$$

تمرين ٣-٢-٣ : متوالية هندسية مكونة من خمسة حدود الحد الثاني منها 4/9 والحد الأخير 32/243 أوجد مجموعها .

تمرين ٣-٢-٤ : أوجد الحدود الناقصة في المتوالية الهندسية الآتية :

$$125 + \dots + \dots + 27$$

تمرين ٣-٢-٥ : متوالية هندسية حدها الأول 11 وحدها الأخير 11 264 والنسبة المشتركة 2 كم عدد حدودها ؟

٣-٣ الفائدة المركبة

لتوضيح الفكرة الأساسية للفائدة المركبة سنبدأ بالمثال التالي :

مثال ٣-٣-١ : إذا استثمر مبلغ قدره £ 8 500 لمدة 12 عاما بفائدة مركبة معدلها 10% في السنة فما هو جملة المبلغ المتجمع في نهاية المدة ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : الفائدة الناتجة في نهاية العام الأول هي $£ 8500 \times 10\% = £ 850$ ، فان رأس المال في بداية العام الثاني يتكون من المبلغ الأصلي زائدا الفائدة

$$£8500 + £850 \times \frac{10}{100} = £8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

وخلال السنة الثانية ، فان هذا المبلغ يربح المقدار التالي :

$$£8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10}{100}$$

وهكذا ، فان رأس المال في بداية العام الثالث يكون :

$$£8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right) + £8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10}{100} = £8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

وبنفس الطريقة نجد أنه في نهاية العام الثالث يكون رأس المال بعد إضافة الفائدة اليه مساويا $£ 8500(1 + 10/100)^3$.

ويمواصلة الحساب بهذه الطريقة نجد أن المبلغ المطلوب حسابه في نهاية السنة 12

$$£8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{12}$$

وهذا المبلغ يساوي

$$£8500 \times (1.1)^{12} = £8500 \times 3.1384 = £26\ 677$$

ولنأخذ بصفة عامة أصلا ابتدائيا قدره P_0 يستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة قدره $r\%$ سنويا ، وباستخدام نفس المنطق المطبق في المثال أعلاه نجد أن الأصل يصبح في نهاية العام الأول .

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

$$P_2 = P_0 (1 + r/100)^2 \quad \text{وبعد سنتين يكون الأصل}$$

ويمواصلة الحساب بنفس الطريقة نجد أن رأس المال المتجمع بعد n من السنوات

$$P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

مثال ٣-٣-٧ : إذا كانت قيم المقاربات تتزايد بمعدل 7% سنويا ، فما قيمة المقار الذي تم شراؤه الآن بمبلغ $£ 20\ 000$ بعد 15 عاما ؟

(م م أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

الاجابة

$$P_0 = £20\ 000, r = 7, n = 15$$

وبالتالي ، فان قيمة المقار بعد 15 عاما ستكون :

$$P_{15} = £20\ 000 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{15} = £20\ 000 \times (1.07)^{15} \\ = £20\ 000 \times 2.759 = £55\ 181$$

تمرين ٣-٣-١٠ : إذا أحصلنا الضرائب فما هو معدل الفائدة المركبة الذي يجب أن يستثمر به مبلغ $£ 1000$ حتى يتجمع مبلغ $£ 2261$ بعد عشر سنوات ؟

(م م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

ويمكن تطبيق المتواليات الهندسية اذا كان لدينا موقف يتعلق بالفائدة المركبة به أصل P_0 يستثمر بفائدة ، وبالإضافة الى ذلك ، فإن هناك مبالغ اضافية ثابتة x تضاف الى الأصل كل عام بعد نهاية العام الأول .

ونشير الى هذا الموقف باسم «فائدة مركبة مع أقساط». وسنرى أن هذه الفكرة خفية في الأهمية. وسيكون الأصل في نهاية السنة الأولى بعد استحقاق الفائدة وبعد دفع القسط الاستثماري، كما يلي:

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right) + x$$

وبالمثل نجد نهاية السنة الثانية سيكون الأصل

$$P_2 = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + x \left(1 + \frac{r}{100}\right) + x = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + x + x \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

وفي نهاية السنة الثالثة سيكون

$$\begin{aligned} P_3 &= P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 + x \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + x \left(1 + \frac{r}{100}\right) + x \\ &= P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 + x + x \left(1 + \frac{r}{100}\right) + x \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

وبمواصلة الحساب بهذه الطريقة نجد في نهاية العام n

$$P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n + x + x \left(1 + \frac{r}{100}\right) + x \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + \dots + x \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1}$$

وتشكل مجموعة الحدود المقابلة للأقساط الاستثمارية متوالية هندسية عدد حدودها n والحد الأول منها x والنسبة المشتركة لها

$$k = 1 + \frac{r}{100}$$

وهكذا فباستعمال القانون الوارد بالبند ٣ - ٢ لمجموع المتوالية الهندسية نحصل على قيمة الأصل بعد القسط في نهاية العام n كما يلي:

$$P_n = P_0(1 + r/100)^n + \frac{x[(1 + r/100)^n - 1]}{(1 + r/100) - 1}$$

ومن هنا نحصل على قانون هام جدا هو

$$P_n = P_0(1 + r/100)^n + \frac{x[(1 + r/100)^n - 1]}{r/100}$$

ويمكن بالاستخدام الصحيح لهذا القانون حل مجموعة كبيرة من مسائل الرياضيات المالية. ونلاحظ أن القانون الأساسي للفائدة المركبة هو حالة خاصة من هذا القانون عندما تكون $x = 0$.

أرصدوا الاحتلال: أول تطبيق ستأولوه هو المبالغ المجدية للاحتلال. وطبقا لهذا النظام، فإن الشركة تقرر تجنب مبلغ

ثابت على فترات منتظمة بهدف استخدامه للاحلال معدات جديدة بدل المستهلكة . ويمكن اعتبار هذه الحالة كمحاكاة خاصة من المذكور أعلاه حيث يساوى الاستثمار الأول P_0 الأقساط الاستثمارية التالية x .

وهكذا ، فإن قيمة المبلغ المجنب للاحلال تستصل بعد n من السنوات وبمعدل فائدة $r\%$ سنويا الى

$$x(1+r/100)^n + \frac{x[(1+r/100)^n - 1]}{r/100}$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بحيث تعطى النتيجة التالية للمبلغ المجنب للاحلال فى نهاية السنة n وبعد دفع القسط .

$$= \frac{x[(1+r/100)^{n+1} - 1]}{r/100}$$

مثال ٣-٣-٣ : يتم تجميع مبلغ للاحلال باستثمار £ 500 كل سنة لمدة عشرين سنة بمعدل فائدة 9% سنويا . وتسدد الدفعة الأولى فوراً ، والأخيرة فى نهاية العام العشرين . أوجد القيمة النهائية للمبلغ المجنب للاحلال .

الاجابة :

$$n = 20, r = 9, x = £500$$

ومنها نوجد القيمة النهائية

$$= \frac{£500(1.09^{21} - 1)}{0.09} = \frac{£50\,000}{9} (6.1088 - 1) = £28\,382$$

تمرين ٣-٣-٢ : يتم تجميع مبلغ للاحلال باستثمار £ 700 سنويا بمعدل فائدة 11% . أوجد عدد السنوات اللازمة لتجميع £ 30 000 .

الدفعات المتساوية : التطبيق الثانى لقانون الفائدة المركبة مع أقساط هو على مسائل الدفعات المتساوية . وهنا فإن P_0 تمثل استثماراً أولياً سالياً لأنها عبارة عن جملة المبلغ المقترض (وعلى سبيل المثال الرهن) أما x فهي قيمة الدفعات المتساوية تسديداً للقرض . أما P_n فهي تساوى صفراً لأن الدفعات يجب أن تعادل بالضبط المبلغ المقترض أولاً . ويمكن استخدام القانون لحساب حجم الدفعات لتسديد القرض فى عدد معين من السنوات ، أو عدد السنين اللازمة لتسديد القرض بحجم دفعات معين .

مثال ٣-٣-٤ :

(أ) تعرض شركة تأجير مكنية قيمتها £ 5000 لمدة 15 عاماً . وعلى المستأجر أن يدفع أقساطاً سنوية متساوية عددها 15 قسطاً . وتدفع الأقساط فى نهاية كل عام وتتضمن سداداً لجزء من الدين مع فائدة بمعدل 10% على الدين المتبقى فى بداية العام . احسب قيمة الأقساط السنوية .

(ب) اذا كانت الأقساط المذكورة فى (أ) أعلاه بقيمة £ 600 ما عدد السنوات التى يجب أن يستمر فيها دفع الأقساط حتى يتهى العميل من دفع ثمن المكنية بالإضافة الى فائدة معدلها 10% سنوياً ؟

(م م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٥)

الاجابة:

$$P_0 = -5000, P_n = 0, n = 15, r = 10 \quad (أ)$$

$$0 = -5000(1 + 10/100)^{15} + \frac{x[(1 + 10/100)^{15} - 1]}{10/100} \quad \text{وبالتالي ، فإن}$$

ومنها

$$5000(1.1)^{15} = \frac{x[(1.1)^{15} - 1]}{0.1}$$

وبالتالي ، فإن

$$x = \frac{5000(1.1)^{15}}{(1.1)^{15} - 1} = \frac{500 \times 4.1772}{4.1772 - 1} = \frac{500 \times 4.1772}{3.1772} = 657$$

. أى أن القسط السنوى المطلوب هو £ 657

$$P_0 = -5000, P_n = 0, x = 600, r = 10 \quad (ب)$$

$$0 = -5000(1.1)^n + \frac{600[(1.1)^n - 1]}{0.1}$$

أى أن

$$0 = -5000(1.1)^n + 6000(1.1)^n - 6000$$

ومنها

$$1000(1.1)^n = 6000$$

أى أن

$$(1.1)^n = 6$$

وبأخذ لوغاريتمات للطرفين

$$n \log 1.1 = \log 6$$

ومنها نوجد

$$n = \frac{\log 6}{\log 1.1} = \frac{0.77815}{0.04139} = 18.8$$

أى أنه يلزم 19 عاما لاستكمال السداد على دفعات قدرها £ 600 سنويا .

تمرين ٣-٣-٣ : يجرى التفاوض مع إحدى شركات التمويل على قرض مقداره £ 15 000 لتمويل شراء حافلاته £ 20 000 وسيمول المبلغ الباقى وقدره £ 5 000 من الموارد الذاتية . وشروط القرض كما يلى :

معدل الفائدة ثابت وقدره 10% سنويا على مدى السنوات الخمسة عشرة . وتحسب الفائدة السنوية على المبلغ المتبقى من القرض في بداية كل عام .

يتم السداد على 15 قسطا سنويا متساويا . ويشمل كل قسط الاصل والفائدة .

والمطلوب حساب مبلغ القسط الذى يدفع سنويا لسداد القرض الذى قيمته £ 15 000 .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

تمرين ٣-٣-٤ : بالنسبة للتمرين ٣-٣-٣ احسب عدد الأقساط اللازمة اذا كانت قيمة القسط 2100 £ .

استهلاك الأصول الثابتة : والآن ستناول طريقة النسبة الثابتة لحساب استهلاك الأصول الثابتة . وهذه الطريقة تطبيق للقانون الأساسى للفائدة المركبة (أى الحالة عندما تكون $x = 0$) مع كون معدل النمو سالبا . وهكذا فبدلا من أن يكون لدينا أصل ينمو بنسبة ثابتة سنويا ، فإن لدينا أصلا ثابتا (ماكينة أو موجودات) تتناقص قيمته بنسبة ثابتة سنويا . فلذا رمزنا لنسبة الاستهلاك الثابتة بالرمز $r\%$ سنويا ، وباستخدام نفس المتطوق المطبق فى حالة الفائدة المركبة ، فإن قيمة الأصل P_n بعد مرور n من السنوات تكون

$$P_n = P_0 \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n$$

حيث P_0 - القيمة الابتدائية للأصل .

مثال ٣-٣-٥ : أصل ثابت قيمته £ 40 000 . ويتظر أن يكون عمره النافع 20 سنة وأن يكون ثمن بيعه بعد ذلك كخردة 4000 £ . فلذا استخدمت طريقة النسبة الثابتة للاستهلاك ، أوجد معدل الاستهلاك السنوى .

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٦)

الاجابة

$$P_0 = 40\,000, P_n = 4000, n = 20$$

وبالتالى ، فإن

$$4000 = 40\,000 \left(1 - \frac{r}{100} \right)^{20}$$

ومنها

$$\left(1 - \frac{r}{100} \right)^{20} = 0.1$$

$$1 - \frac{r}{100} = (0.1)^{1/20} = 0.891$$

أى أن

$$\frac{r}{100} = 1 - 0.891 = 0.109$$

ومنها نوجد

$$r = 10.9$$

أى أن المعدل السنوى لاستهلاك الأصل هو 10.9% .

مثال ٣-٣ : بالنسبة للمثال السابق ٣-٣-٥ احسب القيمة الدفترية للأصل بعد 15 عاما .

الاجابة

$$P_{15} = 40\,000 \left(1 - \frac{10.9}{100}\right)^{15} = 40\,000 (0.891)^{15} \\ = 40\,000 \times 0.177 = 7083$$

أى أن القيمة الدفترية للأصل بعد 15 عاما هي £ 7083

تمرين ٣-٣ : ماكينة ثمنها £ 25 650 تستهلك حتى تصل قيمتها كخردة الى £ 500 بعد عشر سنوات ، والمطلوب حساب مايلى :

١ - المعدل السنوى للاستهلاك باستخدام طريقة النسبة الثابتة .

٢ - القيمة الدفترية فى نهاية العام السادس .

(م م أ - الأسس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

الفائدة المركبة مع التركيب المستمر من التطبيقات المالية المباشرة للذات الأسي $y = e^x$ التى درسناها فى البند ٢ - ٤ حالة الفائدة المركبة التى تضاف فيها الفائدة الى الأصل ليس سنويا ، ولا كل ثلاثة شهور ، أو كل شهر وإنما باستمرار .

وهذه هى الحالة الحدية لإضافة الفائدة ، وتمثل أسرع معدل لنمو الأصل لمعدل ثابت للفائدة المركبة . وقانون الفائدة المركبة لهذه الحالة الحدية :

$$P_n = P_0 e^{rN/100}$$

حيث % r المعدل السنوى للفائدة .

مثال ٣-٣ : استثمر مبلغ £ 7000 بفائدة مركبة بمعدل 12% سنويا . أوجد جملة المبلغ فى نهاية السنة الخامسة إذا كانت الفائدة المركبة تضاف للأصل : (أ) سنويا (ب) كل شهر (ج) باستمرار .

الاجابة :

$$P_5 = P_0 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^5 = £7000 (1.12)^5 = £12\,336 \quad (أ)$$

$$P_5 = P_0 \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{60} \quad (ب)$$

ولما كانت 12% سنويا تلغ كل شهر تعنى 1% شهريا ، فإن

$$P_5 = £7000 \times (1.01)^{60} = £12\,717$$

$$P_5 = P_0 e^{rn/100} = £7000 e^{12.5/100} = £7000 e^{0.125} = £12\,755 \quad (\text{جـ})$$

تعرين ٣-٣ : موجودات قيمتها الأصلية £ 8500 يتم استهلاكها بطريقة النسبة الثابتة بمعدل فائدة 10% سنوياً أوجد مايلي :

- ١- القيمة الدفترية لها بعد ست سنوات إذا كان الاستهلاك يتم سنوياً .
- ٢- القيمة الدفترية بعد ست سنوات إذا كان الاستهلاك يتم باستمرار .
- ٣- الزمن اللازم لوصول القيمة الدفترية إلى £ 5000 إذا كان الاستهلاك يتم باستمرار .

٣-٤ القيمة الحالية :

هذا الموضوع تطبيق آخر للقوانين الأساسية للفائدة المركبة ، والفائدة المركبة مع أقساط . وستناول هذا الموضوع أولاً من وجهة نظر القانون الأساسي للفائدة المركبة ، ثم ستوسع في دراسته ليشمل حالة الفائدة المركبة مع أقساط .

وكل المطلوب حسابياً لاجراء القيمة الحالية هو إعادة ترتيب قانون الفائدة المركبة لنحصل على معادلة تعطي P_0 أى إعادة كتابة القانون $P_n = P_0(1 + r/100)^n$ بحيث نحصل على $P_n = P_0(1 + r/100)^{-n}$.

وهذا يعنى ايجاد المبلغ الذى اذا استثمرناه الآن بمعدل فائدة مركبة $r\%$ سيعطى مبلغاً اجمالياً قدره P_0 بعد مرور n من السنوات . وهذه الحالة مهمة للدرجة أن هناك جداول « لعوامل القيمة الحالية » $(1 + r/100)^{-n}$ تمت وتنتشر للقيم المختلفة لكل من r, n ، والقيمة الحالية هى أساس فكرة الخصم التى سندرسها فى الجزء ٣-٥ .

مثال ٣-٤ : احسب القيمة الحالية بمبلغ £ 50 000 يلزم دفعها بعد 20 عاماً بافتراض أن معدل الفائدة هو $7\frac{1}{2}\%$.

(م م ت-أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

الاجابة :

$$P_n = £50\,000, n = 20, r = 7.5$$

$$P_0 = £50\,000 \left(1 + \frac{7.5}{100}\right)^{-20} = £50\,000 \times (1.075)^{-20}$$

$$= £50\,000 \times 0.2354 = £11\,771$$

تعرين ٣-٤-١ : احسب القيمة الحالية بمبلغ £ 1 يجب دفعه :

(١) بعد عشر سنوات بمعدل فائدة 3%

(٢) بعد خمس سنوات بمعدل فائدة 6%

(م م ت-أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

ويعتابة موضوع القيمة الحالية مع فائدة مركبة وأقساط نصل الى فكرة الدفعات السنوية المتساوية (annuities) وهذا الموضوع يعنى دفع مبلغ ثابت الآن مقابل الحصول على دخل سنوى منتظم لعدد محدد من السنوات فى المستقبل . ويكون مقدار الدخل السنوى محدداً ، والمطلوب تحديد مجموع القيم الحالية لتلك المبالغ .

ويمكن حل هذه المسألة باستخدام قانون الفائدة المركبة مع أقساط بأخذ $P_n = 0$ حيث أن قيمة الدخل السنوى ستكون صفراً بعد دفع آخر دفعة .

$x = -A$ هو المبلغ الذى سيدفع كل عام و P_0 هى القيمة الحالية المطلوبة بتعويض هذين الرقمين فى القانون.

$$0 = P_0(1+r/100)^n - \frac{A[(1+r/100)^n - 1]}{r/100}$$

ويحل المعادلة لإيجاد P_0

$$P_0 = \frac{A[1 - (1+r/100)^{-n}]}{r/100}$$

وهذا القانون هام جدا ، وهناك جداول منشورة لقيمة معامل الدفعات السنوية المتساوية

$$\frac{[1 - (1+r/100)^{-n}]}{r/100}$$

لقيم مختلفة لكل من r, n .

مثال ٣-٤: ما هو المبلغ اللازم حاليا لشراء دخل سنوى ثابت قدره £ 1200 (قبل استقطاع الضرائب) يدفع على أقساط كل ثلاثة أشهر لمدة 12 عاما إذا كان معدل الفائدة % 2½ لكل ثلاثة أشهر ؟ علما بأن الدفعة الأولى تدفع بعد مرور ثلاثة أشهر على الشراء .

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : الدفعات المتساوية كل ثلاثة أشهر $A = \frac{£1200}{4} = £300$. وعدد الفترات التى طولها ثلاثة أشهر $n = 48$ ومعدل الفائدة $r = 2.5$ ، وبالتالي ، فإن :

$$P_0 = \frac{300[1 - (1 + 2.5/100)^{-48}]}{2.5/100} = \frac{300[1 - (1.025)^{-48}]}{0.025}$$

$$P_0 = £8332$$

أى أن القيمة الحالية للدخل السنوى هى : £ 8332 .

تمرين ٣-٤: يتتظر أن يدر منجم دخلا سنويا صافيا (أى بعد خصم تكاليف التشغيل) قدره £ 50 000 لمدة 15 سنة قادمة ، وفى نهاية تلك المدة لن تكون للمنجم أية قيمة . احسب ثمن شراء المنجم ليدر ربحا قدره 12% سنويا .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

٣-٥ • الخصم

الخصم عبارة عن تعميم لفكرة الدفعات السنوية المتساوية لحساب القيمة الحالية لعدد من المبالغ التى ستدفع فى أوقات مختلفة فى المستقبل . وفى هذه الحالة ، فإن الدفعات غير متساوية ، وليست منتظمة فى مواقيدها بالضرورة . ونظرا لأن هذين الشرطين غير محققين فإن المتواليات الهندسية لا يمكن استخدامها للحصول على معادلة سهلة لإجمالى القيمة الحالية . لذا يلزم حساب القيمة الحالية لكل من المبالغ ثم جمعها معا . ومن المفيد استخدام جداول القيم الحالية لحساب القيم الحالية لكل مبلغ .

والخصم من الموضوعات البالغة الأهمية لتقييم الاستثمارات ، خاصة عندما يكون معدل الفائدة مرتفعاً . وتوقف القيمة الحقيقية لأي مبلغ من المال على الموعد الذي سيكون متاحاً فيه .

مثال ٣-٥-١ : يقدر أن الاستثمار في عملية جديدة سيؤدي إلى تدفق الأموال على النحو الموضح بالجدول التالي :

		المبالغ الصافية	
		مصرفات (£)	إيرادات (£)
الآن		60 000	—
في نهاية العام	1	10 000	—
	II	—	15 000
	3	—	20 000
	III	—	20 000
	5	—	20 000
	III	—	20 000

وتريد الشركة أن يكون ربحها من مثل هذه العمليات 15% على الأقل سنوياً . احسب القيم الحالية للإيرادات والمصرفات المتوقعة ، وعلق على القرار الذي يجب اتخاذه .

(م م أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٦)

الاجابة : القيمة الحالية للمصرفات تحسب كما يلي :

$$= £60\,000 + £10\,000 \left(1 + \frac{15}{100}\right)^{-1}$$

$$= £60\,000 + £10\,000(1.15)^{-1}$$

$$= £60\,000 + £8696 = £68\,696$$

والقيمة الحالية للإيرادات تحسب كما يلي :

$$= £15\,000(1.15)^{-2} + £20\,000(1.15)^{-3} + £20\,000(1.15)^{-4}$$

$$+ £20\,000(1.15)^{-5} + £20\,000(1.15)^{-6}$$

$$= £11\,342 + £13\,150 + £11\,435 + £9943 + £8647 = £54\,517$$

وحيث أن القيمة الحالية للمصرفات المتوقعة تتجاوز بكثير القيمة الحالية للإيرادات المتوقعة ، فإن الاستثمار في هذه العملية لا يبدو مفيداً .

تمرين ٣-٥-١ : تفكر شركة في شراء جهاز ثمنه £ 120 000 وتظر أن تعطى الدخل التالي في نهاية كل عام .

العام	الدخل الصافي (£)
1	30 000
2	45 000
3	40 000
4	35 000
5	20 000

وتبلغ قيمة الجهاز في نهاية العام الخامس 7000 £ فإذا افترضنا معدل فائدة قدرة 9% سنويا فهل من المربح شراء هذا الجهاز ؟

وهناك حالات نصادفها في حسابات الخصم يكون المطلوب فيها ليس حساب القيمة الحالية على أساس معدل معلوم للفائدة r وإنما بالعكس حساب معدل الفائدة الذي يعطى للاستثمار قيمة حالية أجمالية مساوية للصفر . ويسمى معدل الفائدة في هذه الحالة « بمعدل العائد الداخلي » ولايوصى بالاقدم على مثل هذا الاستثمار إلا إذا كانت الأموال لايمكن استغلالها بطريقة تعطى معدلا أعلى للفائدة من معدل العائد الداخلي .

مثال ٣- ٥- ٢ : شركة لديها فرصة للاستثمار في مشروع ما . ويمكن للشركة دخول المشروع بدفع مبلغ إجمالي في البداية ، أو بدفع دفعة أولى قدرها 4000 £ يليها قسطان كل منهما 4000 £ في السنتين التاليتين ليصبح إجمالي المساهمة 12 000 £ وتجرى جميع الدفعات في أول يناير من كل عام .

١ - فإذا كان معدل الفائدة السارى هو 20% كفاءة مركبة ، ماهو المبلغ الإجمالي الذي تعادل قيمته الحالية المساهمة التي قدرها 12 000 £ على أقساط ؟

٢ - إذا كان متاحا لدى الشركة مبلغ 10 000 £ جنبه فقط في أول يناير ، فما هو معدل الفائدة الذي يجعل هذا المبلغ مقبولا كمبلغ إجمالي يدفع في بداية المشروع ؟

ملاحظة : يجب توضيح جميع خطوات الحساب

الاجابة :

١ - القيمة الحالية المطلوبة هي

$$\begin{aligned} & £4000 + £4000 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^{-1} + £4000 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^{-2} \\ & = £4000 + £4000 (1.2)^{-1} + £4000 (1.2)^{-2} \\ & = £4000 + £3333 + £2778 = £10 111 \end{aligned}$$

٢ - المطلوب هنا ليس معدلا داخليا للعائد ، ولكن المبدأ هو نفسه حيث أن المطلوب هو معدل فائدة r يجعل القيم الحالية لمبالغ مستقبلية معلومة تساوى مقدارا معينا .

نفرض أن معدل الفائدة المطلوب هو r .

$$\begin{aligned} 10\ 000 &= 4000 + 4000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-1} + 4000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-2} \\ 6000 &= 4000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-1} + 4000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-2} \\ 3 &= 2 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-1} + 2 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-2} \end{aligned}$$

ويضرب طرفي المعادلة في المقدار $(1 + r/100)^2$

$$3\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 2\left(1 + \frac{r}{100}\right) + 2$$

$$3 + \frac{3r}{50} + \frac{3r^2}{10\,000} = 4 + \frac{r}{50}$$

$$\frac{3r^2}{10\,000} + \frac{r}{25} - 1 = 0$$

$$3r^2 + 400r - 10\,000 = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية (أنظر الجزء ٢ - ٣) ويمكن حلها باستخدام قانون معادلات الدرجة الثانية . ومنه نحصل على

$$r = \frac{-400 \pm \sqrt{160\,000 + 120\,000}}{6} = \frac{-400 \pm \sqrt{280\,000}}{6} = \frac{-400 \pm 529.15}{6}$$

وحيث أنه لا معنى لقيمة سالبة للمعدل r فتكون القيمة المطلوبة للمعدل الفائدة الذي يصبح معه المبلغ الاجمالي المتاح مقبولا هي

$$r = \frac{129.15}{6} = 21.5\%$$

تمرين ٣ - ٥ - ٢ : تفكر شركة في استئجار ماكينة لمدة عام بمبلغ £ 4000 . تدفع في بداية العام . وتقدر الشركة أن تدخلها في نهاية العام نتيجة لوجود الماكينة لديها سيكون £ 4500 . أوجد المعدل الداخلي للعائد علم الاستئجار المقترح .

تساوي

- ٣ - ١ - المطلوب حساب أي من الطريقتين التاليتين للدفع أرخص علما بأن الدفع يبدأ في نفس التاريخ ، وأن معدل الفائدة هو 2% كل ثلاثة أشهر (مع بيان خطوات الحساب) :
- (١) £ 10 تدفع في بداية كلا ثلاثة أشهر لمدة عشرين عاما .
- (٢) £ 14.60 تدفع في بداية كل ثلاثة أشهر لمدة عشرة أعوام .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٩)

- ٣ - ٢ - بيع عقار بمبلغ £ 20 000 وكان القدر ينص على أن يدفع المشتري فورا مبلغ £ 8000 نقدا ، ثم مبلغ £ 4000 بعد عام ، ثم مبلغ £ 4000 بعد عامين ، ثم مبلغ الـ £ 4000 الباقية في نهاية العام الثالث ومعها الفائدة المستحقة بمعدل 12% على المبالغ الباقية في نهاية كل عام .

ما هو المبلغ الذي سيدفعه المشتري في نهاية العام الثالث لتسديد القرض كلية ؟

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٩)

٣-٢ (أ) استهلكت قيمة أحد الاستثمارات من £ 32 000 إلى £ 23 500 على مدى ست سنوات . فإذا استُخدمت طريقة النسبة الثابتة لحساب الاستهلاك احسب المعدل السنوي لأقرب رقم عشري واحد .

(م م أ - الأسبوعي ب - نوفمبر ١٩٧٦)

(ب) بالنسبة للمسألة الواردة في الجزء (أ) أعلاه احسب قيمة الاستثمار بعد ثلاث سنوات .

الفصل الرابع

المصفوفات

٤-١ تمهيد

المصفوفات هي مجرد وسيلة لتدوين بيانات معينة . وهي تسهل عملية عرض وحل المشاكل التي يمكن حلها بدون مصفوفات أيضا . ولكن هذه الصيغة اقتصادية جدا ، وبالتالي مفيدة جدا . وكثير من المشاكل يمكن صياغتها بسهولة في صورة مصفوفات ، والتي سوف تكون أكثر تعقيدا بدون استخدام المصفوفات ، واستخدام المصفوفات لا يعتمد على المتغيرات بالمعادلات ، بل يتعامل فقط مع المعاملات . وسوف نعطي بعض التطبيقات فيما بعد ، ولكن الآن سوف نركز على طريقة صياغة المصفوفات .

المصفوفة ببساطة هي عبارة عن ترتيب لمجموعة من الأعداد بين قوسين . وعلى سبيل المثال المصفوفة ،

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 13 \\ 9 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ونسى الأعداد في هذا الترتيب بعناصر المصفوفة والمثال السابق يشير في الحقيقة إلى مصفوفة 4×3 (أربعة في ثلاثة) وذلك لأنها تحتوي على أربعة صفوف ، وثلاثة أعمدة ، وعموما المصفوفة التي تحتوي على m صف ، وعلى n عمود هي مصفوفة $m \times n$ أو تسمى مصفوفة من رتبة $m \times n$.

ويعبر عن المصفوفات عادة في الصيغ الجبرية بالحروف الكبيرة ، كما في المثال السابق . وتختزل المصفوفة إلى عمود واحد ، وذلك في حالة خاصة عندما $n = 1$ فمثلا

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 17 \\ 12.8 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad y = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

وتسمى المصفوفة لهذا النوع بمتجه العمود . ويمثل متجه العمود بالحروف الصغيرة أو بالحروف التي تحتها خط .

٤-٢ القوانين الجبرية للمصفوفات

(أ) التلوى :

تساوى مصفوفتان إذا ، وإذا فقط كان كل عناصرهما المتناظرة متساوية . وعلى سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

يعنى هذا $a = 4$ ، $b = 2$ ، $c = 3$ ، $d = 7$

(ب) الجمع والطرح

يمكن أن نجمع المصفوفات ، أو تطرح إذا ، وإذا فقط كانت من نفس الرتبة ، فإذا كانت عملية الجمع ممكنة فإن ذلك يتم بجمع العناصر المتناظرة فى المصفوفات المعينة . وعلى سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+u & b+v \\ c+w & d+x \end{pmatrix}$$

مثال ٤-٢-١: أوجد

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 3+4 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

الاجابة :

تمرين ٤-٢-١: أوجد

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤-٢-٢: أوجد

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤-٢-٣: أوجد $A + B$ إذا كان

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(جـ) حاصل الضرب فى رقم

لضرب المصفوفة فى رقم ، فإنه يضرب كل عنصر فيها على حدة فى نفس الرقم . فمثلا

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

تعرين ٤ - ٧ - ٤ إذا كان

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ أوجد } 2A + 3B$$

(د) حاصل ضرب المصفوفات

اعتبر المصفوفتان A و B يعرف المضروب AB، وإذا فقط كان عدد الأعمدة للمصفوفة A مساويا لعدد الصفوف للمصفوفة B.

وفي هذه الحالة تكون المصفوفتان متاسبتين للمضروب AB.

ولكى نرى كيفية حساب الضرب إذا أمكن، فسوف نعرض المثال التالى.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

المصفوفة A تحتوى على 3 أعمدة والمصفوفة B تحتوى على 3 صفوف وعلى هذا فان المصفوفتين متاسبتان للمضروب AB. وسوف تكون مصفوفة المضروب AB من رتبة 2×3 .

$$AB = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 & b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 \end{pmatrix}$$

نواجه العناصر الموجودة فى كل صف للمصفوفة A مع العناصر المناظرة فى كل عمود للمصفوفة B. نلاحظ أن B تحتوى على 3 أعمدة، ولكن A تحتوى على 2 من الصفوف فقط. إذن المصفوفتان غير متاسبتين للمضروب BA. ومن الواضح أنه لا يمكن عموما أن نحصل على $AB = BA$ ، وذلك لأنه ليس من الضروري أن يكون كلا المضروبين موجودا ويفرض وجود كلا المضروبين فمن الممكن ألا يتساويان.

وبوجه عام، إذا كان A من رتبة $m \times n$ و B من رتبة $n \times p$ إذن يكونا متاسبتين للمضروب AB وحاصل الضرب يكون من رتبة $m \times p$. وسوف لا يكونا متاسبتين للمضروب BA ما لم يكن $p = m$ وإذا تحقق هذا الشرط، فإن المضروب يكون من رتبة $n \times n$.

مثال ٤ - ٧ - ٢:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

أوجد AB وأيضا BA

الاجابة:

$$AB = \begin{pmatrix} 2-1 & 6+2 & 12+4 \\ 1-7 & 3+14 & 6+28 \\ 5-3 & 15+6 & 30+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ -6 & 17 & 34 \\ 2 & 21 & 42 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2+3+30 & 1+21+18 \\ -2+2+20 & -1+14+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 40 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤-٢-٥

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

أوجد المضروب الممكن ايجاده .

(هـ) مُتَوَرِّد المصفوفة :

إذا بُدِّلَت الصفوف والأعمدة للمصفوفة A فالمصفوفة الناتجة تسمى بمدور المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A' فمثلا :

$$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ويقال للمصفوفة التي لم تتغير بعد تدويرها بالمصفوفة المتماثلة . وعلى سبيل المثال .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{هو} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك تكون متماثلة مدور .

(و) المصفوفة الصفرية ومصفوفات الوحدة

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي كل عناصرها تساوى أصفارا . فمثلا

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفات صفرية . والمصفوفات الصفرية لها نفس دور العدد صفر في عملية الحساب العادي أي أنه لا يتغير قيمة أي مصفوفة إذا جمع عليها ، أو طرح منها مصوفة صفرية ، وناتج ضرب المصفوفة الصفرية في أي مصفوفة دائما يساوى مصفوفة صفرية . ويؤخذ في الاعتبار أنه يمكن الحصول على مصفوفة صفرية من ناتج ضرب مصفوفتين غير صفريتين . وعلى سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أما مصفوفة الوحدة فهي مصفوفة مربعة (أي أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة) كل عناصرها تساوى أصفارا ما عدا عناصر القطر الرئيسي (أي من القيمة الشمال الى القاع اليمين) حيث كل منها يساوى الوحدة . ومن ثم

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

كلها أمثلة لمصفوفات الوحدة .

ومصفوفة الوحدة لها نفس دور الرقم واحد في حاصل الضرب العادي أي أنه لا يتغير قيمة المصفوفة إذا ضربت في مصفوفة الوحدة . فمثلا .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة دائما يرمز لها بالرمز I ويترك لسياق الكلام توضيح من أي رتبة هي مصفوفة الوحدة العلة المأخوذة ، حتى أنه في نفس المعادلة يكون الرمز I له رتب مختلفة مع اختلاف موضعه في المعادلة . ومن المثال السابق نكتب .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

والتابع يمكن أن تلخص على النحو التالي :

$$IC = C = CI$$

وفي الحد الأول تكون I مصفوفة من رتبة 2×2 وفي الحد الأخير تكون I مصفوفة من رتبة 3×3 .

(ى) معكوس المصفوفة

المصفوفات المربعة فقط هي التي يكون لها معكوس . ولا يمكن الحصول على معكوس ، أي نوع آخر من المصفوفات ، كما أنه ليس لكل مصفوفة مربعة معكوس . وتسمى المصفوفة المربعة التي ليس لها معكوس بالمصفوفة الشاذة .

المعكوس A^{-1} لمصفوفة المربعة A هو مصفوفة تحقق العلاقة التالية

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ومعكوس المصفوفة له نفس دور المقلوب في عمليات الحساب العادى . وعلى سبيل المثال ، القيمة 0.25 هي معكوس للعدد 4 حيث إذا ضرب في العدد 4 كان الناتج 1 . وذلك لأن $1 = 0.25 \times 4 = 4 \times 0.25$. ومن الممكن إيجاد حل للمعادلات المصفوفة إذا أمكن إيجاد معكوس المصفوفات . ولنفترض ، على سبيل المثال ، يوجد لدينا المعادلة $AX = B$ حيث عناصر A وعناصر B معلومة والمطلوب هو إيجاد عناصر X .

وليس له معنى أن نقسم على A ولكنه إذا وجد معكوس A فإنه يمكن ضرب طرفي المعادلة من جهة اليسار في A^{-1} فنحصل على

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

من ثم

$$X = A^{-1}B$$

أذن

وهذا يكافئ في عمليات الحساب العادى حل المعادلة $5 = 4x$ بضرب طرفي المعادلة في 0.25 وهو معكوس العدد 4 ، للحصول على

$$0.25 \times 4x = 0.25 \times 5$$

$$1x = 1.25$$

$$x = 1.25$$

٤-٣ استخدام المصفوفات لحل المعادلات الآتية :

التطبيق المباشر للنتيجة الأخيرة في الجزء ٤-٢ هو حل مجموعة من المعادلات الآتية . وسوف نعرض في هذا الجزء بعض مسائل عن مصفوفات يمكن أن يكون لها معكوس ، ولكن في الجزء ٤-٤ سوف نشرح فعليا كيفية الحصول على معكوس مصفوفة .

مثال ٤-٣-١ :

١- حقق بواسطة حاصل الضرب المصفوفى أن معكوس المصفوفة

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix} \text{ هو } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

٢- استخدم المصفوفات لحل المعادلات الآتية

$$3x + 2y + z = 4$$

$$x + y - z = -2$$

$$2x - 3y + 4z = 8$$

الاجابة :

$$-١ \quad \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = I$$

٢- يمكن كتابة مجموعة المعادلات على الوجه التالى :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

هذه هي معادلة مصفوفية على الشكل الذى عرض في مؤخرة الجزء ٤-٢ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

وكل من المصفوفتين الأخيرتين هي من نوع متجه العمود ويمكن كتابة الحل على صيغة المصفوفات على الوجه التالى $Ax = b$.

ومن البند ٤-٢ نلاحظ أن $x = A^{-1}b$ ومن ثم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 38 \end{pmatrix}$$

ويكون الحل هو $x = -\frac{1}{7}, y = \frac{6}{7}, z = \frac{19}{7}$

تمرين ٤-٣-١٩

(أ) حقق بواسطة حاصل ضرب المصفوفى أن معكوس المصفوفة

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ هو } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(ب) نفرض أن X و Y هما ناتجان يتم الحصول عليهما بإجراء عمليتين . وأن الوقت الكلى المتاح للعملية I هو 66 ساعة (x يتطلب 18 ساعة و Y يتطلب 6 ساعات) ، والوقت الكلى المتاح للعملية II هو 68 ساعة (X يتطلب 12 ساعة و Y يتطلب 16 ساعة) .

والمطلوب منك أن تستخدم طرق المصفوفات لتحين كم من X و Y يمكن أن ينتج إذا استغل وقت الاستعمال بالكامل .

(م م ث لـ المهنى أ - ١٩٧٦ ورقة نموذج)

٤-٤ حساب معكوس المصفوفات

سوف نعرض فى هذا الجزء كيفية الحصول على معكوس مصفوفات من الرتب 2×2 و 3×3 وفى العادة المصفوفات كبيرة الرتب التى لا يمكن إيجاد معكوسها بالخطوات البسيطة ولكن يمكن استخدام الحاسب الآلى لإيجاد معكوسها .

ومبدئياً يجب أن نعرض فكرة لمحدد المصفوفة 2×2 . ويرمز لها لمحدد المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ويكتب على الصورة $ad - bc$. وعلى هذا فالمحدد مامو الا عدد .

ويمكن الحصول على معكوس مصفوفة من رتبة 2×2 بتبديل العناصر الموجودة على القطر الرئيسى ، مع تغيير اشارات الحدين الآخرين ثم القسمة على قيمة المحدد . وعلى هذا

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{مثال ٤-٤-١: } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ انعكس المصفوفة}$$

الاجابة :

هذه هى المصفوفة التى استخدمت فى التمرين ٤-٣-١٩ ، حيث أن قيمة محددها يساوى $12 - 3 = 9$ وبتبديل وتغير الاشارات نحصل على

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤-٤-١ : لنفترض نظام لمشاركة العمل في الأرباح ينص على أن يأخذ العمال 10% من المكسب بعد الضرائب . والمدفوعات للعمال طبقا لهذا النظام تخضع لتخفيض ضريبي والضرية تؤخذ على 50% علما بأن الضريبة السنوية المأخوذة عن المكسب حتى 31 مارس 1977 كانت £ 100 000 قبل مشاركة نصيب العمال في المكسب . والمطلوب حساب المبلغ المفروض توزيعه على العمال باستخدام مصفوفات جبرية . ضاع المسألة في صيغة رياضية ، ثم أوجد الحل موضحا جميع الخطوات اللازمة .

(٣٣م أ - المعنى أ - مايو ١٩٧٧)

ومعكوس مصفوفة من الرتبة 3×3 أكثر استعلا وكنت بتوقف أيضا على المحددات لمصفوفات من الرتبة 2×2 .

$$\text{مثال } 4-4-2 \text{ انعكس المصفوفة } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

الاجابة : الخطوة الأولى هي تكوين مصفوفة جديدة من الرتبة 3×3 -عناصرها هي المحددات لمصفوفات من الرتبة 2×2 التي نحصل عليها بحذف الصف والعمود اللذين يحتويان على العنصر المأخوذ في المصفوفة الأصلية . وكذلك تضاف اشارة سالبة لجميع العناصر ماعدا العناصر التي في الأركان ، والعنصر الذي في المركز . ومن ثم نحصل على

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -(4+2) & -3-2 \\ -(8+3) & 12-2 & -(9-4) \\ -2-1 & -(3-1) & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ -11 & 10 & 13 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

وتسمى عناصر هذه المصفوفة المحددات للمصفوفة الأصلية .

الخطوة الثانية هي ايجاد محدد المصفوفة الأصلية . المحدد لمصفوفة من الرتبة 3×3 نحصل عليه بأخذ أي صف أو عمود ، وحساب لكل عنصر قيمته مضروبة في قيمة المحدد له . وجمعها جميعا . فباستخدام الصف الأول هنا نحصل على $-14 = (-5) + 1 \times (-6) + 2 \times (-3)$.

الخطوة الثالثة ، والأخيرة هي ايجاد مدور مصفوفة المحددات ، وقسمتها على قيمة المحدد .

$$\text{ومن ثم } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-14)} \begin{pmatrix} 1 & -11 & -3 \\ -6 & 10 & 4 \\ -5 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

وهذا كما هو معطى في المثال ٤-٣-١ .

تمرين ٤-٤-٢: أوجد معكوس نظام المعادلات الخطية الآتي باستخدام طريقة المصفوفات الجبرية لايجاد قيم المتغيرات x_1, x_2 و x_3 .

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$-3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$

(م م ت أ - المهني - مايو ١٩٧٦)

٤-٥ تحليل المدخلات - المخرجات

هذا الأسلوب يمكن تطبيقه على قطاعات اقتصادية ، أو شركات فردية ، وفي حالة استخدام الناتج من القطاعات الاقتصادية أو أقسام الشركة كمدخل لنفس القطاع ، أو قطاعات أخرى . والمشكلة الرئيسية التي يستخدم في حلها نظام تحليل المدخل - المخرج هي الحصول على كمية الانتاج اللازمة من كل قطاع لكي نحقق المطالب النهائية . والمخرجات الكلية المطلوبة سوف تزيد على المطالب النهائية حيث أن بعض النواتج سوف يستخدم في القطاعات المختلفة .

وباستعراض المثال التالي لاقتصاد افتراضي يتكون من ثلاثة قطاعات X ، Y و Z . حيث وحدات المدخلات والمخرجات بالمليون جنيه ، كما هو موضح فيما يلي :

	المدخلات الى			المطلوب النهائي	الناتج الكلي
	X	Y	Z		
نتج من X	90	150	225	75	540
نتج من Y	135	150	300	15	600
نتج من Z	270	200	300	130	900

عند تخطيط جدول مناظر يجب استخدام نفس الوحدات لجميع النواتج المأخوذة في الاعتبار هنا ، وهو ليس المتبع دائما وإن ناتج قطاع ما يستخدم كمدخل لنفس القطاع كما هو مبين . اما اذا كان هذا الاعتبار غير متحقق ، ففي هذه الحالة نحصل على قيم صفرية على القطر الموجود بالجدول المرتبط بالقطاعات (انظر الى نص التمرين رقم 3)

الاساس المتعارف عليه لتحليل المدخلات - والمخرجات هو
المدخلات الكلية = المخرجات الكلية

اذا المدخلات الكلية للقطاعات X ، Y و Z هي 540 ، 600 و 900 على الترتيب . والفروق بين هذه الأرقام والمدخلات المأخوذة من القطاعات . تمثل مدخلات أخرى ، وتتضمن من الوجهة العملية اشياء مثل المواد الخام ، للعمالة والأرباح (أو الخسارة) .

ومن ثم يمكننا توسيع جدول المدخل - المخرج المعطى على الوجه الآتي

	X	Y	Z	المطلوب النهائي	الناتج النهائي
X	90	150	225	75	540
Y	135	150	300	15	600
Z	270	200	300	130	900
مدخل آخر	45	100	75		
مدخل كلي	540	600	900		

فيما يلي الفرض الذي تركز عليه نظرية المدخل- المخرج وهو مجال لبعض الجداول

ان المخرجات تتغير لكي تتجاوب مع تغيرات المطالب النهائية
والنسبة لمدخل قطاع ما من أحد المصادر تظل ثابتة

من دخل X الناتج من X	$\frac{150}{600}$	دخل Y الناتج من X	$\frac{225}{900}$	دخل Z الناتج من X	$\frac{90}{540}$
من دخل X الناتج من Y	$\frac{150}{600}$	دخل Y الناتج من Y	$\frac{300}{900}$	دخل Z الناتج من Y	$\frac{135}{540}$
من دخل X الناتج من Z	$\frac{200}{600}$	دخل Y الناتج من Z	$\frac{300}{900}$	دخل Z الناتج من Z	$\frac{270}{540}$

وهذه النسب توضع في المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \frac{90}{540} & \frac{150}{600} & \frac{225}{900} \\ \frac{135}{540} & \frac{150}{600} & \frac{300}{900} \\ \frac{270}{540} & \frac{200}{600} & \frac{300}{900} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ونسمى بمصفوفة المدخلات - المخرجات وعناصرها تسمى بالمعاملات التقنية وبافتراض أن المطالب النهائية الحالية تتغير من 75، 15 و 130 إلى d_x ، d_y و d_z بالنسبة لانتاج القطاعات X ، Y و Z على التوالي . والمطلوب هو إيجاد المخرجات الكلية X_x ، X_y و X_z المتطلبية من القطاعات الثلاثة حتى تتلام مع هذه المطالب . وإذا كانت هذه هي المخرجات الكلية ، اذن بالعرف المتفق عليه تكون المدخلات الكلية للقطاعات هي X_x ، X_y و X_z .

وتكون المخرجات الكلية المطلوبة من X هي

$$X_x = d_x + \frac{90}{540} \times (\text{الدخل الكلي الى } X) + \frac{150}{600} \times (\text{الدخل الكلي الى } Y) + \frac{225}{900} \times (\text{الدخل الكلي الى } Z)$$

أي أن ،

$$X_x = d_x + \frac{1}{6} X_x + \frac{1}{4} X_y + \frac{1}{4} X_z$$

وبغض الأسلوب بالنسبة للقطاع Y :

$$X_y = d_y + \frac{1}{4} X_x + \frac{1}{4} X_y + \frac{1}{3} X_z$$

وبالمثل بالنسبة للقطاع Z :

$$X_z = d_z + \frac{1}{2} X_x + \frac{1}{3} X_y + \frac{1}{3} X_z$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات الثلاث على صورة مصفوفة على الوجه التالي :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}$$

أو

$$IX = d + AX$$

حيث أن

$$d = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}$$

ومن ثم

$$IX - AX = d$$

اذن

$$(I - A)X = d$$

وعليه

$$X = (I - A)^{-1} d$$

هذه هي المعادلة الأساسية لتحليل المدخل - المخرج وهي تمكنتنا من إيجاد مجموعة المخرجات المطلوبة للقطاع X لتحقيق مجموعة المطالب النهائية المعطاة d . كما يتطلب في حل مسألة تحليل المدخل - المخرج إيجاد المصفوفات A و d ثم بالتعويض مباشرة في المعادلة السابقة .

لتفترض في مثالنا هذا أن المطالب النهائية هي £ 50m من إنتاج X ، £ 10m من إنتاج Y ، £ 100m من إنتاج Z وعلى هذا

$$d = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

نحصل على

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

اذن

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ومن ثم

$$X = (I - A)^{-1} d = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{335}{109} & \frac{216}{109} & \frac{234}{109} \\ \frac{288}{109} & \frac{372}{109} & \frac{294}{109} \\ \frac{395}{109} & \frac{348}{109} & \frac{486}{109} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42360}{109} \\ \frac{47520}{109} \\ \frac{71880}{109} \end{pmatrix}$$

وتكون النواتج الكلية المطلوبة هي 388.62 مليون £ من انتاج X ، 435.96 مليون £ من انتاج Y ، 659.45 مليون £ من انتاج Z .

تمرين ٤ - ١ : دخل افراضى يتكون من قطاعين A و B لهما المدخل والمخرج بملايين الجنيهات على النحو التالى :

	المدخل الى		المطلوب النهائي	الناتج الكلى
	A	B		
المخرج من A	150	240	210	600
المخرج من B	200	120	160	480

أوجد الناتج الكلى المطلوب اذا كانت المطلوب النهائية تغير الى 100 مليون £ من انتاج A والى 200 مليون £ من انتاج B .

وأحد تطبيقات المصفوفات الذي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بتحليل المدخل - المخرج وله أهمية للمحاسبة هي مسألة توزيع تكاليف أقسام الخدمات على أقسام الإنتاج . وبعض نواتج أقسام الخدمات تستغل بواسطة أقسام الخدمات نفسها . وهذه التعاملات الداخلية يجب أن توضح حتى يمكن تحديد المبالغ التي يلزم تحميلها على أقسام الإنتاج . مثال ٤ - ١ : توزيع تكاليف قسم الخدمة على أقسام الإنتاج وأقسام الخدمات الأخرى يمكن أن يمثلوا في مصفوفة جبرية واحدة

افترض البيانات التالية :

	السام الخدمة (صيانة - كهرباء)		السام الإنتاج (ميكنة - تجميع)	
	صيانة	كهرباء	ميكنة	تجميع
ساعات عمل للصيانة	—	3 000	16 000	1 000
وحدات الكهرباء المستهلكة	20 000	—	130 000	50 000
تكاليف القسم قبل أي ضم لأقسام الخدمة	£50 000	£4 000	£140 000	£206 000

والمطلوب هو :

احسب التكاليف الكلية لكل توزيع على أقسام الإنتاج مستخدماً مصفوفة جبرية (ضع المسألة في صيغة رياضية ووضح طريقة الحل) .

(م م ت أ - المهنى أ : مايو ١٩٧٧)

الاجابة : لنفترض أن x هي تكلفة الصيانة « الفعلية » في النظام بعد تحديد الكهرباء وأن y هي تكلفة الكهرباء « الفعلية » في النظام بعد تحديد الصيانة . إذن

$$x = 50\,000 + 0.1y$$

وحيث أن الصيانة المستخدمة هي $1/10$ من الكهرباء الكلية في النظام .

$$y = 4000 + 0.15x$$

وحيث أن الكهرباء المستخدمة هي $3/20$ من الصيانة الكلية في النظام . من ثم

$$\begin{aligned} x - 0.1y &= 50\,000 \\ -0.15x + y &= 4\,000 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.15 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix}$$

إذن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.985} & \frac{0.1}{0.985} \\ \frac{0.15}{0.985} & \frac{1}{0.985} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50\,400}{0.985} \\ \frac{11\,500}{0.985} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51\,167.51 \\ 11\,675.13 \end{pmatrix}$$

وباستخدام النسب التي يحصل عليها من الجدول المعطى ، فإننا نحصل على التكاليف الفعلية الموزعة على أقسام الإنتاج .

$$\begin{pmatrix} 51\,167.51 \\ 11\,675.13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{20} & \frac{13}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 140\,000 \\ 206\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{تكلفة الآلات} \\ \text{تكلفة التجميع} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 140\,000 \\ 206\,000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40\,934.01 + 7\,588.83 \\ 2\,558.38 + 2\,918.78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 188\,522.84 \\ 211\,477.16 \end{pmatrix}$$

التكاليف الكلية الى اقرب جنيه الموزعة على اقسام الانتاج هي £ 188 523 بالنسبة للالات £ 211 477 بالنسبة للتجميع .

نمرين ٤ - ٥ - ٦ مصنع لديه قسمان للخدمة ركو S_2 وقسمان للانتاج P_1 و P_2 ومخصصات كل قسم موضحة كما يلي :

S_1	S_2	P_1	P_2
£6000	£10 000	£8000	£17 000

وكفائدة لاستعمال الخدمات S_1 فإنها توزع كالتالى :

$$. P_2 \text{ لـ } 30\% , S_1 \text{ لـ } 25\% , P_1 \text{ لـ } 45\% .$$

وبالنسبة لـ S_2 :

$$. P_2 \text{ لـ } 40\% , S_1 \text{ لـ } 33\% , P_1 \text{ لـ } 27\% .$$

والمطلوب وضع صورة مصفوفات نمر عن A , I و B للحصول على التحديد الأكثر دقة لمخصصات اقسام الخدمة الى اقسام الانتاج ، وحيث ان

$$S = (I - A)^{-1} b \quad \text{و} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

احسب المخصصات الكلية للتكلفة النهائية المخصصة لـ P_1 و P_2 .

(م م ت أ - المهنى أ - مايو ١٩٨٠)

تمارين

٤ - ١ تستخدم غالباً حلول نظم المعادلات الخطية فى معالجة مشاكل المواجهة الادارية والموضحة بالنظام العام التالى :

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

والمطلوب هو :

(١) التمييز عن النظام السابق بصيغة المصفوفات ، وتعيين المصفوفة ، المتصلة والناصر المتجهة .

(٢) اذكر حجم المصفوفة .

(م م ت أ - المهنى أ - مايو ١٩٧٦)

٤-٢ يتطلب إنتاج تغذية حيوان ما خليط 31b من القمح (w) و 61b من الشعير (b) و 31b من الجزر (c) ، والسعر لكل 1b هو 10 ، 9 و 6 على التوالي :

والمطلوب :

(أ) أذكر المصفوفة لعملية تعيين التكلفة C لإنتاج 1b 11 من التغذية .

(ب) أوجد الحل .

(م م ت أ - المهنى أ - مايو ١٩٨٠)

٤-٣ شركة لها ثلاثة أقسام لإنتاج P ، Q و R بمدخلات ومنتجات مقارنة بالوحدات الموضحة على النحو التالي :

	المدخل الى P	المدخل الى Q	المدخل الى R	المطلوب النهائي	النتاج الكلي
النتاج من P	0	30	60	110	200
النتاج من Q	10	0	90	150	250
النتاج من R	25	25	0	250	300

أوجد الانتاج الكلي المطلوب من الأقسام اذا كانت المطالب النهائية تتغير الى 300 ، 200 و 400 على التوالي .

٤-٤ : أوجد صورة المصفوفة لحل المسائل التالية . ولاحظ المطلوب في حلها .

$$40x + 70y + 7z - 300 = 0 \quad (أ)$$

$$22x + 35y + 12z - 525 = 0$$

$$y + z - 30 = 0$$

على شكل : $Ax = c$

(ب) التكلفة الكلية C لشراء أربع سلع من ممول ، وكلها مختلفة السعر :

على شكل : $q'p = C$

(م م ت أ - المهنى أ - نوفمبر ١٩٧٨)

الفصل الخامس

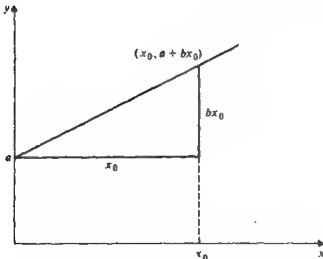
حساب التفاضل

١-٥ تعريف المشتقة الأولى

حساب التفاضل يختص بتحليل الرياضى الخاص بالتغير ، حيث أن كثيرا من المفاهيم للأعمال والشؤون المالية تحوى على تغير ، وحساب التفاضل هو وسيلة قيمة للمحاسبين ، ورجال الأعمال . وعلى سبيل المثال ، الربح ممكن أن يتغير حسب كمية الإنتاج ، والطلب على الإنتاج ممكن أن يتغير حسب ثمنه ، ويستخدم حساب التفاضل لتصغير أو تكبير الدوال ، مثل دالة الربح أو دالة التكلفة .

عموما ستدرس الميل ، أو الانحدار للخط المستقيم ومثل هذه الدالة تعطى على الصورة $y = a + bx$ حيث أن المعاملين a و b هما المقطع والميل للدالة ، على التوالى ، كما هو موضح فى الشكل ١-٥ . ويتعين الميل من التعريف الآتى :

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير فى المتغير التابع}}{\text{التغير المناظر فى المتغير المستقل}}$$



شكل ١-٥

وعلى سبيل المثال ، عندما توجد نقطتان على خط مستقيم ، ولتكن $(1, 3)$ و $(4, 7.5)$ ، فباستخدام التعريف السابق نحصل على

$$1.5 = \frac{4.5}{3} = \frac{7.5 - 3}{4 - 1} = \text{الميل}$$

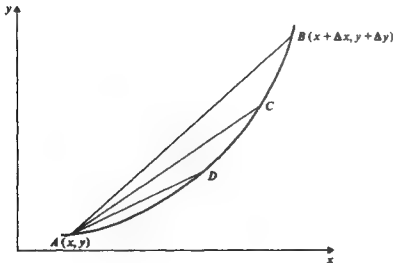
ومن الواضح أن ميل الدالة الخطية هو مقدار ثابت ؛ أي أن الميل هو نفسه عند كل نقطة على الخط . ومن المألوف أن أن نرمز Δy (« دلتا y ») للتغير في y و Δx للتغير في x وعلى هذا فإن ميل الخط الواصل بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الميل للمنحنيات التي ليست لها خطوط مستقيمة يعتبر مقدارا غير ثابت ولكنه يتغير كلما تحركنا على المنحنى . ولنفترض المنحنى كما بالشكل ٢-٥ ، ويراد معرفة الميل عند A علما بأن هذا الميل يمكن الحصول عليه من تقريب الميل للخط AB أي أنه يقدر بالمقدار $\Delta x/\Delta y$ ولنفترض الآن نقطة مأخوذة على المنحنى ولتكن C فمثلا وهي قريبة من A أكثر من قربها من B والميل للخط المستقيم AC هو تقريب للميل عند A أفضل من ميل AB . ونفس الطريقة ، إذا أخذنا نقطة أخرى ، ولتكن D أكثر اقترابا من A وعليه فالتقريب أفضل بقياس ميل AD . وسوف نستمر في تكرار هذه العملية على هذا النمط ، وإذا حدث أن اختيرت النقطة أكثر اقترابا من A بحيث لا يمكن تفرقتها عن A حيثئذ سوف نحصل على الميل بالضبط للدالة عند النقطة A .

ونعرف الميل عند A كقيمة نهائية للنسبة $\Delta x/\Delta y$ كلما اقتربت Δx الى الصفر ، أي أنها لا يمكن تفرقتها عن الصفر . إذن يعرف الميل على النحو التالي

$$\text{الميل} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



شكل ٢-٥

أي نهاية المقدار $\Delta y / \Delta x$ عندما Δx تقترب من الصفر . وتسمى هذه النهاية بمشتقة الدالة ويعطى لها الرمز dy/dx . وعلى هذا ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وعملية الحصول على المشتقة الأولى للدالة تنسب إلى علم التفاضل .

وعندما توجد علاقة بين y و x بحيث أن قيمة y تمين بوجود x وغالباً يمكن كتابتها على الصورة $y = f(x)$ (وتقرأ f لـ x) ويكون الطريقة الأخرى للرمز عن المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ وبالنسبة إلى x هي $f'(x)$ (وتقرأ f داش x) . ومن الملاحظ أن المشتقة الأولى للدالة هي نفسها دالة لـ x ، وأيضاً الميل للدالة عند نقطة خاصة يحصل عليه بالتعويض عن قيمة x المطلوبة .

مثال ١-١-٥ : استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد تفاضل الدالة $y = x^2$.

الاجابة : سوف نفترض نقطتين على المنحنى ويقتربان كل منهما للآخر ، وليكن (x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ وعلى هذا نحصل على $y = x^2$ و $(y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2$ بالطرح يتج أن

$$\begin{aligned} (y + \Delta y) - y &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ \Delta y &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned} \quad \text{أي أن :}$$

وإذا أجرينا قسمة الطرفين على Δx نحصل على

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

ولكن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

إذن ميل $y = x^2$ عند أي نقطة يعطى بالدالة $dy/dx = 2x$.

الميل عند $x = 1$ هو 2 dy/dx

الميل عند $x = -5$ هو -10 dy/dx إلى آخره .

مثال ٢-١-٥ : باستخدام تعريف التفاضل كعملية نهائية ، أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

$$١ - y = x^3$$

$$٢ - y = 3x^2 + 5x + 7$$

الاجابة :

$$١ - \text{إذا كان } y = x^3 \text{ و } y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 \text{ إذا}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

و

٢- إذا كان $y = 3x^2 + 5x + 7$ ، إذا

$$(y + \Delta y) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 7$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 7] - [3x^2 + 5x + 7]}{\Delta x} \\ &= 3(2x + \Delta x) + 5 \end{aligned}$$

وعلى هذا

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 5$$

لاحظ أن الثابت 7 لم يظهر .

هذه الطريقة الجبرية يمكن دائما استخدامها لاجراء مشتقة دالة معطاه ، بالرغم من أنها شاقة إلى حد ما بالنسبة إلى الدوال المركبة . وعمليا لاستخدام هذه الطريقة لحساب ميل المنحنى ، ولكن عوضا عنها سوف نستخدم بعض القواعد الخاصة التي يمكن استنتاجها من التعريف السابق للتفاضل . وعادة تستخدم هذه القواعد في التطبيق لعملية استخدام التفاضل . والآن سوف نعرض القواعد ونقتصر أمثلة لتوضيح كيفية استخدامها .

القاعدة الأولى: إذا كانت $y = c$ ، حيث c مقدار ثابت ، فإن $dy/dx = 0$ أى أن ، مشتقة المقدار الثابت تساوى صفراً .

مثال : إذا كان $y = 8$ إذن $dy/dx = 0$.

القاعدة الثانية: إذا كان $y = x^n$ فإن $dy/dx = nx^{n-1}$.

مثال : إذا كانت $y = x^3$ فإن $dy/dx = 3x^2$.

(عموما قد حصلنا على هذه النتيجة سلفاً)

مثال : إذا كان $y = x^9$ فإن $dy/dx = 9x^8$.

مثال : إذا كان $y = 1/x^3 = x^{-3}$ فإن $dy/dx = -3x^{-4} = -3/x^4$.

القاعدة الثالثة: إذا كانت $y = ax^n$ فإن $dy/dx = nax^{n-1}$. حيث أن a مقدار ثابت .

مثال : إذا كان $y = 5x^2$ فإن $dy/dx = 10x$ (2x) 5

مثال : إذا كان $y = 8x^4$ فإن $dy/dx = 32x^3$ (4x³) 8

مثال : إذا كان $y = 2/x^4 = 2x^{-4}$ فإن $dy/dx = 8x^{-5} = 2(-4x^{-5})$

القاعدة الرابعة : نفترض أن u و v كل منهما دالة لـ x . وأن du/dx و dv/dx مشتقاتهما بالنسبة إلى x حيث إذا كان $y = u = v$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

مثال : إذا كان $y = x^2 + x^3$ فإن $dy/dx = 2x + 3x^2$

مثال : إذا كان $y = 5x^4 + 7x$ فإن $dy/dx = 20x^3 + 7$

مثال : إذا كان $y = 3x^2 + 5x + 7$ فإن $dy/dx = 6x + 5$ (التي تكافئ الإجابة في المثال

١-٢-٥) .

وعموما مشتقة مجموع عدة دوال يساوى مجموع مشتقاتها المتناظرة . ومن أجل ذلك ، من الممكن إيجاد المشتقة (الميل) عند أى نقطة بشرط أن الدالة تكون على الصورة .

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

مثال ١-٢-٥ باستخدام نتائج التفاضل ، أوجد dy/dx لكل من الدوال التالية وأحسب الميل للمنحنى عند النقطة المعطاة .

١- $y = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ عند (1 ، 1) .

٢- $y = 2x + 4/x$ عند (2 ، 6) .

الإجابة

١- عندما $y = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ فإن $dy/dx = 9x^2 + 4x + 4$.

عندما $x = 1$ ، $dy/dx = 17$ فإن الميل = 17 .

٢- عندما $y = 2x + 4/x = 2x + 4x^{-1}$ فإن $dy/dx = 2 - 4/x^2$.

عندما $x = 2$ ، $dy/dx = 1$ فإن الميل = 1 .

أيضا الثابت الأسى e له بعض الخواص المتعلقة بالتفاضل . إذا كان

فإن $y = \ln x$

$dy/dx = 1/x$

أى أن ، الميل عند أى نقطة على المنحنى $y = \ln x$ يساوى قيمة $1/x$ عند النقطة . ولربما القارىء يود أن يتحقق من هذه النتيجة ، وذلك يرسم المنحنى الأسى على ورق رسم بياني ، ويقدر الميل عند نقط مختلفة .

ونتيجة مفيدة أخرى على النحو التالي ، إذا كان

$$y = \ln x$$

فإن

$$dy/dx = 1/x$$

تمرين ١-١-٠ : لكل دالة أوجد dy/dx والميل للمنحنى عند النقطة المعطاة .

١- $y = x^4$	عند	$(0, 0)$
٢- $y = 5x^2 - 3x - 4$	عند	$(2, 10)$
٣- $y = 4 + 2/x$	عند	$(-1, 2)$
٤- $y = x + 1 + 1/x$	عند	$(1, 3)$
٥- $y = \ln 5x$	عند	$(1, \ln 5)$

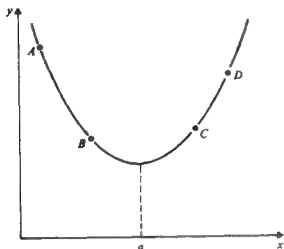
٢-٠ القيم العظمى والصغرى :

المفاهيم للقيم الكبرى والصغرى هي مصطلحات شائعة تستخدم في الحياة اليومية ، فمثلا القيمة العظمى لمجموعة كبيرة من فواتير الحسابات هي الكمية الواضحة في فاتورة الحساب ، التي تكون أكبر من كل الفواتير الأخرى . والقيمة الصغرى هي الكمية في فاتورة الحساب التي تكون أصغر من كل الفواتير الأخرى ، ومن الضروري في هذه الحالة فحص كل فاتورة للفصل ، أيهما يكون أكبر ، أو أصغر من الآخر . ومن الطبيعي ، أن هذه الطريقة تكون شاقة ولحسن الحظ لدينا الطريق الأكثر تقويما لايجاد القيم العظمى والصغرى متاحا لنا لحل مشاكل عدد من الأعمال ومشاكل الأعمال المالية .

دعنا الآن ندرس المشتقة عند أربع نقاط A, B, C و D كما في الشكل ٣-٠ . عند A يكون الميل $f'(x)$ سالبا . وكلما تقدمنا إلى B ، يظل $f'(x)$ سالبا ، ولكن ليس كبيرا (بالنسبة لمفهوم السالب) وعند C تكون $f'(x)$ موجبة وتزداد إيجابيا كلما تحركنا إلى D . وإذا كان الميل سالبا عند A, B ولكن موجبا عند C, D فإن عند إحدى النقاط بين B, C (عند $x = a$) لابد أن يكون الميل مساويا للصفر في شكل ٣-٠ تتعين نقطة الدوران الصغرى للدالة عند $x = a$.

وبالمثل ، إذا نظرنا إلى الشكل ٤-٠ فالميل لدى اليسار عند $x = a$ يكون سالبا ، ولكنه يتناقص في المقدار كلما تحركنا نحو $x = a$ من جهة اليسار . أما من جهة اليمين عند $x = a$ الميل يكون سالبا ، ثم يصبح أكبر بضم مطلقا كلما تحركنا أقصى اليمين . ومرة أخرى عند النقطة $x = a$ فإن الميل (المشتقة) يكون مساويا للصفر . وشكل ٤-٠ يوضح نقطة الدوران العظمى عند $x = a$.

والصورة المشتركة لهذين الشكلين هي عند النقطة $x = a$ التي عندها المشتقة تساوي الصفر . ومن ثم يمكننا الانتفاع من هذه المعلومة لتوضيح نقط الدوران العظمى والصغرى للدوال . ومعنى أن $f'(x) = 0$ ليس بالضرورة أنه يشير إلى نقطة الدوران . وكما نرى في شكل ٥-٠ الميل لدى اليسار للنقطة $x = a$ يكون موجبا ، ويتناقص في المقدار كلما اقتربنا من $x = a$ ولدى اليمين للنقطة عند $x = a$ تكون المشتقة موجبة وتزداد في المقدار كلما تحركنا بعيدا لدى اليمين . وعند النقطة $x = a$ ثانيا ، الميل يساوى صفرا . ومن الواضح أن مثل هذه النقطة أما أن تكون نقطة دوران عظمى ، أو نقطة دوران صغرى ، ويعبر عنها بنقطة الانقلاب .. وسوف لاتعرض لمثل هذه النقاط في هذا الكتاب .



شكل ٣-٥

ويمكن أن نستخدم الطريقة التالية لإيجاد نقط الدوران للدالة المعطاة .

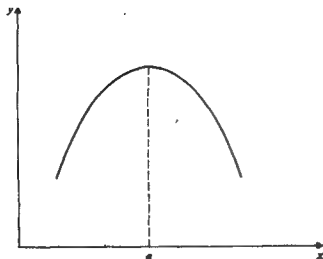
فاضل الدالة المعطاة للحصول على الميل .
وضع الميل يساوى صفراً ، وحل المعادلة الناتجة .

مثال ١-٢-٥ : أوجد نقط الدوران للمنحنى .

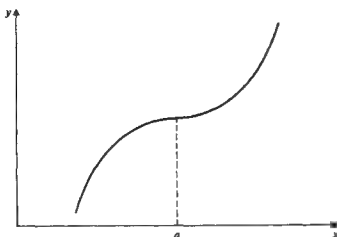
$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

الاجابة : بتطبيق القواعد فى الجزء ١-٥ ، نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x - 3)(x - 1) \end{aligned}$$



شكل ٤-٥



شكل ٥-٥

بناء على ذلك فإن $dy/dx = 0$ عندما $x = 1$ وعندما $x = 3$
 عندما $x = 1$ ، $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$
 عندما $x = 3$ ، $y = 27 - 54 + 27 - 4 = -4$

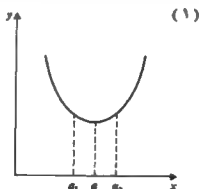
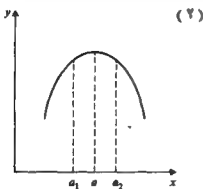
إذا كان الميل للمنحنى عند النقط (1,0) و (3, -4) يساوى صفرا . وهذه هي نقط الدوران . ومهما كان إلى هذا الحد ، فأننا لم نتمكن من تحديد أى من هذه النقط ، يكون نقطة دوران عظمى أم نقطة دوران صغرى ، أو نقطة انقلاب .

وسوف نعرض الآن مسألة كيفية التمييز بين هذه الحالات الممكنة . إحدى هذه الطرق اختبار إشارة المشتقة بالقرب من $x = a$ قبل $x = a$ بقليل ، وبعد $x = a$ بقليل .

في شكل ٦-٥ (١) ، $f'(a_1) < 0$ ، $f'(a) = 0$ ، $f'(a_2) > 0$ هذه النتائج تشير إلى نقطة الدوران الصغرى .

في شكل ٦-٥ (٢) ، $f'(a_1) > 0$ ، $f'(a) = 0$ ، $f'(a_2) < 0$ هذه النتائج تشير إلى نقطة الدوران العظمى .

ويمكن استخدام هذه الطريقة لتوضيح نقط الدوران العظمى والصغرى ، ولكن يجب أن نختار a_1 و a_2 قريبين من a لتأكيد صحة التحديد . والطريقة البديلة ، الأقل جهدا ، هي تكون عادة مفيدة حيث أنها تحترى إيجاد مشتقة المشتقة واختبار اشارتها . وتعرف مشتقة dy/dx بالمشتقة الثانية ويرمز لها d^2y/dx^2 أو $f''(x)$.



شكل ٦-٥

إذن مرة ثانية نختبر شكل ٦-٥ (١) نجد أن الإشارة للمنحنى تتغير من سالبة إلى موجبة بين $x = 0$ و $x = 3$ ، أي أن ، الميل يتزايد . ويمكننا حساب أنه عند نقطة الدوران الصغرى d^2y/dx^2 تكون موجبة . وفي شكل ٦-٥ (٢) نجد أن الميل يتغير من موجب إلى سالب ، أي أن الميل يتناقص . وعلى هذا ، عند نقطة الدوران العظمى ، تكون d^2y/dx^2 سالبة . إذن يمكننا أن نعين نقط الدوران العظمى والصغرى باستخدام الطريقة التالية :

فاصل الميل وأختبر الإشارة للمشتقة الثانية بالتعويض عن قيمة نقطة الدوران . وإذا كانت المشتقة الثانية موجبة ، فتكون نقطة الدوران الصغرى قد عثت ، أما إذا كانت المشتقة الثانية سالبة فتكون نقطة الدوران العظمى قد عثت .

مثال ٢-٢-٥ : للمنحنى $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ أوجد نقطة الدوران التي تكون عظمى ، والتي تكون صغرى .
الاجابة عموما قد نتج من حل المثال ٢-٢-٥ : أن النقط (1,0) و (3 , -4) التي تجعل الميل مساويا للصفر للدالة $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

عندما $x = 1$ ، $d^2y/dx^2 = -6$ إذن النقطة (1 , 0) تكون نقطة دوران عظمى .

عندما $x = 3$ ، $d^2y/dx^2 = +6$ إذن النقطة (3 , -4) تكون نقطة دوران صغرى .

مثال ٣-٢-٥ : أوجد القيمة الصغرى للدالة $y = x^2 - 2x + 4$ باستخدام التفاضل .
(م م أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

الاجابة

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 = 0 \text{ عندما } x = 1$$

عندما $x = 1$ إذن $y = 3$ أي أن (1 , 3) لها ميل يساوى صفرا .

الآن $d^2y/dx^2 = 2$ التي هي دائما موجبة . وعلى ذلك فإن القيمة الصغرى للدالة $y = x^2 - 2x + 4$ هي 3 التي

تحدث عند $x = 1$.

مثال ٤-٢-٥ : باستخدام نوعية خاصة لفترة زمنية معطاء ، فإن التكلفة لكل وحدة انتاج تهبط كلما ارتفع عدد الوحدات المنتجة ، حتى أنه يمكن الوصول الى نقطة عندما تكلفة كل وحدة ممكن أن ترتفع بسبب التكلفة الإضافية الناتجة من وقت اضافي مكلف ، وذلك للتعويض بالنسبة للثمن الأصلي .

فإنه يمكن ايجاد العلاقة بين حجم الانتاج والسعر لكل وحدة في حالة ما يذكر على النحو التالي :

$$\text{تكلفة لكل وحدة (بالجنهات)} = \frac{840\,000}{(\text{عدد الوحدات المنتجة})^2} + (\text{عدد الوحدات المنتجة}) \times 2$$

- (أ) ارسم شكلا بيانيا موضحا هذه العلاقة للنتائج مبتدئا بـ 40 وحدة وصاعدا بمقدار 10 وحدات الى 120 وحدة .
 (ب) أوجد مستوى الانتاج الذى يحوى أقل تكلفة لكل وحدة باستخدام حساب التفاضل .
 (م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٣)

الاجابة : إذا فرضنا عدد الوحدات المنتجة يساوى x والتكلفة لكل وحدة تساوى y اذن نحصل على

$$y = \frac{840\,000}{x^2} + 2x$$

(أ) دفنا نعين بعض النقط على الشكل البياني .

x	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y	605	436	353	311	291	284	284	289	298

نضع هذه النقط ، كما فى الشكل ٥-٧ ونوصلها للحصول على المنحنى لتوضيح العلاقة بين y و x لجميع قيم x بين 40 و 120 .

(ب) إذا كان

$$y = \frac{840\,000}{x^2} + 2x$$

اذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1\,680\,000}{x^3} + 2 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على $x = \sqrt[3]{840000} = 94.3$ وهذا ليس بعدد صحيح ، ولكن $y = 283.06$ عندما $x = 94$ و $y = 283.07$ عندما $x = 95$ ، فقد حصلنا على أصغر تكلفة لكل وحدة تحدث عندما $x = 94$ (تأكد من أن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة لجميع قيم x) .

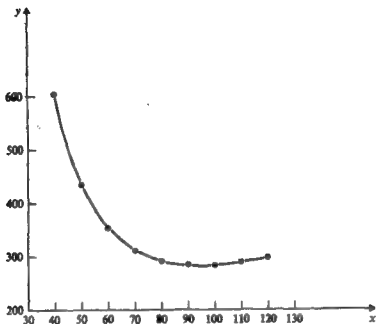
نمرين ٥-١ المطلوب ، فى المدى للقيمة من 2 - الى 3 للمقدار x هو :

(أ) حساب القيم العظمى والصغرى للدالة .

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$$

(ب) ارسم المنحنى الذى معادله : $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٥)



شكل ٧ - ٥

٣-٥ التطبيقات المالية لحساب التفاضل

يوجد كثير من الحالات في الأعمال والشؤون المالية التي يتغير فيها المتغير بالنسبة لمتغير آخر . ففي نظرية الإنتاج ، الناتج يتغير مع تغيرات ساعات عمل العمال ، أو في نظرية المؤسسة ، تتغير التكلفة ردا على تغيرات الناتج . وهذان مثالان لتحديد كيفية التعبير عن التحاليل الهامشية في نظرية الاقتصاد . وعلى سبيل المثال : فالإنتاج الهامشي يقاس بمعدل التغير للناتج كلما تغير العمال ، والتكلفة الهامشية تقاس بمعدل التغير للتكلفة كلما تغير الناتج . والآن سوف ندرس نظرية المؤسسة بأكثر وضوحا .

افترض أن التكلفة الكلية y لإنتاج x وحدة من سلعة معينة تعطى بالدالة .

$$y = C(x)$$

دالة التكلفة الهامشية $MC(x)$ هي ميل دالة التكلفة الكلية ، وعلى سبيل المثال : إذا كانت $C(x) = 500 + 3x^2$ حيث أن x هو الناتج لكل وحدة زمن ، والتكلفة الهامشية هي

$$MC(x) = \frac{d}{dx} [C(x)] = 6x$$

ويوجد دالة هامة أخرى ، وهي دالة متوسط التكلفة ، والتي تعرف على النحو التالي :

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}$$

مثال ٣-٥-١ : لدالة التكلفة الكلية $C(x) = 50 + 4x + x^2$ أوجد :
١ - التكلفة الثابتة

- ١ - التكلفة الثابتة
- ٢ - التكلفة المتغيرة
- ٣ - التكلفة الهامشية .
- ٤ - متوسط التكلفة .

الاجابة :

١ - أولا ، دعنا نتعرف على التكلفة الاجمالية الناتجة من حاصل جمع التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة ، طبقا للمعادلة التالية .

التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة = $C(x)$

التكلفة الثابتة هي تكلفة عدم انتاج أى وحدة ، ولتكن التكلفة الثابتة = 50

٢ - التكلفة المتغيرة = $4x + x^2$

٣ - التكلفة الهامشية

$$MC(x) = \frac{d}{dx} C(x) = 4 + 2x$$

٤ - متوسط التكلفة

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{50}{x} + 4 + x$$

ويمكن ايجاد دوال مشابهة من دالة الايراد الكلى $R(x)$ وتسمى دالة الايراد الهامشى $MR(x) = d[R(x)]/dx$ ودالة متوسط الايراد $AR(x) = R(x)/x$ وتوجد علاقة هامة بين دالة التكلفة الكلية ودالة الطلب . فلذا كان p سعر كل وحدة عندما تكون x هي عدد الوحدات المطلوبة ، نحصل على :

$$R(x) = px$$

حيث أن p دالة لـ x التى تعبر عن الصلة بين السعر لنوعى السلعة ، والكمية المطلوبة وهى عادة تشير الى منحنى الطلب .

والدالة الهامشية للايراد هي معدل التغير فى الايراد بالنسبة الى التغير فى الطلب .

ومن الواضح أن دالة متوسط الايراد مطابقة لـ p أى سعر كل وحدة .

$$\text{مثال } ٥ - ٣ - ٧ : \text{ دالة الطلب لنوع سلعة ما هي } x^2 - 20$$

حيث أن p السعر لكل وحدة و x عدد الوحدات المطلوبة . أوجد الايراد الكلى والايراد الهامشى ، ودالة متوسط الايراد .

الاجابة :

$$R(x) = px = 20x - x^3$$

$$MR(x) = \frac{d}{dx} [R(x)] = 20 - 3x^2$$

$$AR(x) = \frac{R(x)}{x} = 20 - x^2$$

لاحظ أن دالة الربح $P(x)$ هي الفرق بين الايراد الكلى والتكلفة الكلية ،

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

الهدف الرئيسى لمعظم الشركات هو أن المكسب يجب أن يزيد ، والذي كما هو واضح يتحقق عندما $dp/dx = 0$ و $d^2P/dx^2 < 0$ ويمكن أيضا كتابة هذه النتيجة بالنسبة للدوال الإيراد والتكلفة .

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} < \frac{d^2C(x)}{dx^2} \text{ و } \frac{d}{dx}R(x) = \frac{d}{dx}C(x)$$

مثال ٣-٣ : بين مدى المبيعات من 30 - 80 وحدة ، تحدد الإدارة دخل المبيعات بالدالة التالية :

دخل المبيعات (بالبنيهات) = (عدد الوحدات المباعة) \times £ 20 - (عدد الوحدات المباعة) \times £ 0.15 \times x^2 بينما التكلفة الكلية تتعين بالدالة التالية :

$$\text{التكلفة الكلية بالبنيهات} = £ 450 + (\text{عدد الوحدات المباعة}) \times £ 2$$

(أ) باستخدام التفاضل أوجد الناتج الذى يعطى دخلا أكبر مايمكن ، واحسب الربح الأكبر .

(ب) أوجد نقطة تقاطع خطوط الدخل والتكلفة ، أى أن ، النقطة التى عندما لا يوجد ربح ولا يوجد خسارة .

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة اذا فرضنا أن x تساوى عدد الوحدات المباعة ، إذن

$$R(x) = 20x - \frac{3x^2}{20} \text{ and } C(x) = 450 + 2x$$

ويمكن أن ترى هذه الدوال أكثر وضوحا فى شكل ٣-٢ .
(أ) الدالة الهامشية للإيراد هى :

$$MR(x) = 20 - 3x/10 = 0 \text{ ، عند القيمة العظمى .}$$

الإيراد يكبر عندما $x = 66\frac{2}{3}$ (أى أن 67) وحدة .

دالة الربح هى

$$\begin{aligned} P(x) = R(x) - C(x) &= \left(20x - \frac{3x^2}{20}\right) - (450 + 2x) \\ &= 18x - 450 - \frac{3x^2}{20} \end{aligned}$$

$$\frac{dP(x)}{dx} = 18 - \frac{3x}{10} = 0 \text{ ، عند الربح الأكبر}$$

الربح يكبر عندما $x = 60$ ، وعلى هذا الربح الأكبر هو

$$(18 \times 60) - 450 - \frac{3 \times 60^2}{20} = £90$$

(ب) ولكن الربح يحصل عليه عندما $R(x) = C(x)$ ، أى أن

$$20x - \frac{3x^2}{20} = 450 + 2x$$

$$x^2 - 120x + 3000 = 0$$

أو

القيمة الوحيدة لـ x التى تحقق هذه المعادلة من الدرجة الثانية خلال مدى القيم الحقيقية هي $x = 35.5$.

مثال ٣-٤-٥ حديثاً عين موظف ملم بعلم الاقتصاد الى ادارة مركز لتصنيع الاثاث أمكنه تحديد دوال الإيراد الكلى والتكلفة الكلية لانتاج شركة ما لتصنيع أطقم فوتيهات . والدوال هي :

$$R = 200q - 4q^2$$

$$C = 40q + 100$$

R هو المائد الكلى للأسبوع بالجنهات .

C هي التكلفة الكلية للأسبوع بالجنهات .

Q هو عدد الفوتيهات المباعة فى الأسبوع .

المطلوب :

(أ) أوجد المائد الكلى الأكبر الذى تستحقه الشركة فى الأسبوع .

(ب) عين الكمية والسعر اللذان يجعلان الربح الأسبوعى أكبر مايمكن ، لانتاج اطقم الفوتيهات .

(ج) اشرح كيف يتغير السعر الأمثل اذا ارتفعت التكلفة الثابتة الى 150 £ للأسبوع .

(د) عين الفرق فى مستويات الربح اذا كان هدف الشركة هو زيادة الإيراد عن زيادة الربح .

(ج م م - المهنى ٢ - ديسمبر ١٩٧٥)

الاجابة :

$$MR(q) = 200 - 8q = 0 \text{ عندما } q = 25$$

(أ)

$$R(25) = 200 \times 25 - 4 \times 25^2 = 2500$$

الإيراد الأكبر فى أسبوع واحد هو £ 2500 .

(ب)

$$P(q) = R(q) - C(q) = 160q - 4q^2 = 100$$

$$MP(q) = 160 - 8q = 0 \text{ عندما } q = 20$$

الربح يكون كبيراً عندما $q = 20$. كما أن $R(q) = pq$. إذن

$$p = \frac{R(20)}{20} = \frac{2400}{20} = 120$$

أى أن $p = 120$ ، $q = 20$ سوف يزيدان الربح الأسبوعى .

(جـ) إذا زادت التكلفة الثابتة إلى 150 فإن دالة التكلفة الهامشية لا تتغير ، إذن ، الكمية المفضلة والسعر سوف يظلان كما هما .

(د) المطلوب هو :

$$P(20) - P(25) = 1500 - 1400 = £ 100$$

المرونة للطلب هي إحدى المفاهيم الهامة في النظرية الاقتصادية . وأنه في العادة تقاس الاستجابة للطلب لسلمة مطبقا لتغير سعرها وعلى هذا الأساس تعرف المرونة بالنحو التالي :

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{نسبة التغير في الطلب}}{\text{نسبة التغير المناظر في السعر}}$$

$$\frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{\Delta x/x}{\Delta p/p}$$

ونقطة المرونة للطلب η هي نهاية هذا المقدار كلما $\Delta p \rightarrow 0$ أى أن :

$$\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

ونلاحظ أن مرونة الطلب مستقلة عن الوحدات التى تقاس بالمتغيرات .

مثال ٥-٣-٥: يعرف الطلب على الإنتاج بالدالة $p = 384 - 2x^2$ حيث x هي الكمية المطلوبة (بالآلاف) و p هي السعر لكل وحدة . عين السعر ، والكمية التى تجعل الأيراد أكبر ما يمكن . ثم احسب مرونة الطلب عند هذه الكمية .

الاجابة

$$R(x) = px = 384x - 2x^3$$

$$\text{عندما } x = 8 \quad MR(x) = 384 - 6x^2 = 0$$

الأيراد الأكبر يحدث عندما $x = 8$ و $p = 256$ إذن $dp/dx = -4x$ ، إذن

$$\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{dp/dx} = \frac{384 - 2x^2}{x} \left(\frac{1}{-4x} \right) = \frac{1}{2} - \frac{96}{x^2}$$

عندما $x = 8$ ، $\eta = -1$

ويمكننا استنتاج أنه إذا كان السعر يتزايد بمقدار 1% ، فإن الكمية المطلوبة تتناقص بحوالى 1% .

مع اننا استعرضنا لبعض التطبيقات على التكلفة والإيراد ودالة الربح ، إلا أنه هناك مجالات أخرى في العلاقات الاقتصادية تستخدم فيها الدوال ومشتقاتها . ويمكننا جدولاً بعض هذه العلاقات ذات الأهمية في مجال المال والأعمال .

المشتقة %	x	y / $f(x)$
التكلفة الهامشية	نتائج	تكلفة
الإيراد الهامشي	نتائج	إيراد
المكسب الهامشي	نتائج	ربح
الدخل	زمن	ثروة
الاستثمار	زمن	رقم المال
معدل النمو	زمن	نتائج
الانتاجية الهامشية	الحركة العمالية	نتائج
الاستعداد الهامشي للاستيراد	دخل قوى	مستويات
الاستعداد الهامشي للبيع	دخل قوى	مخبرات
الاستعداد الهامشي للاستهلاك	دخل قوى	استهلاك

نعرين ١-٣-٥ إذا أعطيت دوال التكلفة الكلية والإيراد على النحو التالي :

$$C(x) = 10 + 5x + 0.25x^2$$

و

$$R(x) = 40x - x^2$$

على التوالي ، حيث أن x هي النتائج الكلية :

- ١- أوجد الناتج الذي يزيد الربح ، وما هو هذا الربح الأكبر ؟
- ٢- ماهو متوسط الإيراد لكل وحدة بحيث يكون أكبر من متوسط التكلفة لكل وحدة عند مقدار الانتاج الذي يزيد الربح .

تمارين

١-٥ لكل من الدوال الآتية ، على الصورة $y = f(x)$ احسب dy/dx .

$$y = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad (أ)$$

$$y = x^2 - 1 + x^2 \quad (ب)$$

$$y = 5x^3 - 4x - 3 \quad (ج)$$

٢-٥ أوجد :

(أ) قيم x التي عندما $f(x)$ لها نقطة رجوع .

(ب) باستخدام مشتقات الدرجة الثانية ، عين أى من النقط تكون قيم عظمى ، أو صغرى ، عندما

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$$

٣-٥. يدرس مشروع ويؤخذ فى الاعتبار الفروض الآتية (عندما x هى الانتاج الأسبوعى بالآلاف للوحدات) :

$$R(x) = 50x \quad C(x) = 2x^3 + 200$$

أوجد :

- (أ) دالة الإيراد الهامشية
- (ب) دالة التكلفة الهامشية .
- (جـ) دالة الربح الهامشى .
- (د) الناتج الذى يرفع الربح .
- (هـ) الربح الأعظم .
- (و) مدى الناتج الذى يحقق مكسباً .

٥-٤ نتيجة للتوسع فى الأعمال بيوتويا (Utopia) فى السنوات الحالية ، فقد أنشأت هيئة المنتجات الاقتصادية قسم مبيعات فى بيوتويا مسئولاً عن بيع انتاج جديد . والمكتب الرئيسى والمركز الصناعى مازالا يوجدان فى UK (المملكة المتحدة) .

والمدير المالى للشركة قد أعطى قيمة تقريبية للتكلفة الكلية للصناعة فى UK وتكلفة نقل الانتاج تعطى بالدالة $C = q^2 = 20q + 40$ حيث C تساوى التكلفة الكلية للأسبوع بالجنهات و q تساوى كمية الانتاج المباع . وهذه التكلفة تظهر فى حسابات قسم التصنيع .

كما أن التكلفة الكلية لقسم التسويق ، فى بيوتويا ، يمكن أن تعطى بالدالة $C = q^2 + 140q + 200$ والتى تتضمن £ 100 لكل عنصر فى الانتاج ، والتى هى سعر النقل للوحدة مدفوع عن طريق قسم التسويق لقسم التصنيع . وهذا السعر الكلى يظهر فى حسابات قسم التسويق .

علما بأن دالة الإيراد لقسم التسويق قد قدرت بالمقدار $R = 500q - 8q^2$ حيث R تساوى الإيراد الكلى لكل أسبوع بالجنهات .

المطلوب : حساب الخطة المثلى باستعمال حساب التفاضل لكل مما يلى :

- (أ) قسم التسويق ،
- (ب) قسم التصنيع ،
- (جـ) الشركة ككل .

(ح-م - المهنى ٢ - ديسمبر ١٩٧٧)

الفصل السادس

جمع البيانات

٦-١ أسباب استخدام العينات

ينبى جزء كبير من العمل الإحصائي على استخدام « عينة » لاستنباط النتائج عن « المجتمع » الذى سمحت منه ككل ، وفى الواقع فأننا لو فحصنا كل مفردات المجتمع فأننا نكون قد قمنا بما يسمى « بالاحصاء » . وميزة الاحصاء أنه يعطينا فكرة كاملة ومبسطة عن المجتمع ، ولكنه فى العادة غير عملى ، كما أنه مكلف . ولكى نوضح مزايا الفحص بالعينات أو « المعاينة » سنأخذ المثال التالى :

مثال ٦-١ - لنفرض أننا نريد أن نعرف الأجر المتوسط الذى يحصل عليه الأشخاص البالغون فى مدينة صغيرة . فلماذا يكون أخذ عينة أفضل من بحث كل أفراد المجتمع ؟

الاجابة : هناك عدة أسباب تجعل أخذ عينة أفضل من إجراء تعداد كامل . وفيما يلى تفصل هذه الأسباب .

١ - من الواضح أنه أرخص إذا أخذنا جزءاً من المجتمع كعينة من أن نبحت المجتمع كله . والوفر هنا قد ينشأ من انخفاض تكاليف البريد ، أو تكاليف الانتقال حسب الطريقة التى سيجرى المسح الإحصائي بها .

٢ - يستغرق الاحصاء وقتاً طويلاً . وقد يكون عنصر الوقت هاما إذا كان مطلوبوا الحصول على المعلومات بسرعة حتى يمكن اتخاذ القرار فى الوقت المناسب .

٣ - فى حالة الاحصاء يكون مطلوبوا الحصول على معلومات من كل فرد فى المجتمع . ولكن قد لا يكون الحصول على معلومات من كل فرد فى المجتمع ممكناً ، إما لأنه لا يمكن الاتصال بكل شخص من العاملين ، وأما - وهذا هو الأرجح - لأن بعض البالغين قد يرفضون إعطاء المعلومات المطلوبة (إذا أخذت عينة فيجب توخى الحرص الشديد حتى لا تكون متحيزة) .

٤ - وعلى كل ، فإن أهم سبب لاستخدام المعاينة هو أن الدقة التامة عادة لا تكون ضرورية وقد تعطينا عينة صغيرة مايكفى من المعلومات للوصول الى الدقة المطلوبة . وهذا هو الواقع فى كثير من الاحصاءات . وفى بعض الأحيان يمكن القول بأن العينات تعطى معلومات أدق من الاحصاء . وعلى سبيل المثال فأننا لو طلبنا من كاتب للمراجعة أن

يبحث عدد كبيراً جداً من التعاملات المالية فقد يرتكب بعض الأخطاء نتيجة للاجهاد وصعوبة التركيز . ولقد يصبح تلافي الأخطاء ممكناً لو قام نفس الكاتب يبحث دقيق لعينة أصغر .
وتسرى الأسباب السابقة لاستخدام المعاينة على معظم حالات المسح الاحصائي .

٦-٢ طرق اختيار العينة

عندما نختار عينة فائنا نأمل في أن تكون لها نفس صفات المجتمع المسحوبة منه ، وبالتالي أن تعكس صورة متوازنة لهذا المجتمع . وهناك عدة طرق لاختيار العينات ومنها الكثير مما يطبق عملياً . وبصفة عامة يمكن تصنيف طرق اختيار العينات الى قسمين كبيرين :

١ - الطرق الاحتمالية لاختيار العينات .

٢ - الطرق التقديرية لاختيار العينات .

وفي الاختيار التقديرى للعينات ، فان القائم بالاختيار يحدد مقدماً العوامل التى ستحدد ما اذا كان أحد افراد المجتمع سيدخل ضمن العينة أم لا . أما فى الطرق الاحتمالية لاختيار العينات ، فان لكل فرد فرصة معلومة في أن يكون ضمن العينة . والواقع أن الطرق الاحتمالية للمعاينة هى وحدها التى تسمح لنا بالحصول على تقديرات يكون احتمال خطئها معلوماً . وفيما يلى نشرح الطرق الرئيسة للمعاينة الاحتمالية :

(أ) المعاينة العشوائية البسيطة

هذه المعاينة هى النوع الأساسى للمعاينة الاحتمالية ؛ وهى شائعة الاستعمال وسهلة الاستخدام من وجهة النظر الاحصائية . كما أنها تشكل الأساس لعدد من أساليب المعاينة الأكثر تعقيداً .

والصفة المميزة للمعاينة العشوائية البسيطة هى أن كل مجموعة مكونة من n من مفردات المجتمع لها فرصة متساوية في الاختيار عند سحب العينة وفى العادة ، فان مثل هذه العينات يحصل عليها بسحب عدد من المفردات من المجتمع الواحدة بعد الأخرى دون اعادتها . وهكذا فانه في كل مرحلة يكون لكل مفردة باقية في المجتمع نفس احتمال السحب .

ولاحتمنى العشوائية أن تسحب العينة كيفما اتفق ؛ وليس كافياً للباحث أن يسحب المفردات « عشوائياً » لأنه قد يظهر تحيزاً غير مقصود . وأفضل طريقة لاختيار مفردات العينة هى باستخدام جداول الأرقام العشوائية .

مثال ٦-٢-١ : هناك ٨٠ شركة مرتبة حسب ارباحها والمطلوب أخذ عينة عشوائية مكونة من عشرين من تلك الشركات ، ولدينا قائمة من الأرقام العشوائية فيما يلى جزء منها :

46819037154583502

والمطلوب

بيان كيفية استخدام هذه القائمة لاختيار عشرين شركة من الشركات الثمانين مع توضيح كيفية اختيار الشركات الثلاث الأولى .

(جـ م - م - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة : يجب ان يتم اختيار العينة بحيث يكون لكل مفردة فى المجتمع نفس الفرصة لأن تكون ضمنها .
 وفى البداية نرقم جميع الشركات بأرقام من 01 الى 80 . ثم نختار نقطة للبداية فى جدول الأرقام العشوائية (فلذا كنا لم نستخدم هذا الجدول من قبل ، فلئنا نختار بداية الجدول) . ولما كان عدد الشركات أقل من 100 فلئنا نقسم الجدول بحيث تظهر الأرقام أزواجاً . ثم نضع علامة على عشرين رقماً عشوائياً ، وتكون مفردات المجتمع التى تحمل هذه الأرقام هى مفردات العينة . فإذا ظهر نفس الرقم مرتين نعتبره لاغياً . وبالمثل اذا ظهر رقم أكبر من $N = 80$ يعتبر كذلك لاغياً . ونستخدم الأرقام العشوائية المعطاه لتوضيح هذه الطريقة .

46	✓	
81	x	(تعتبر لاغية)
90	x	(تعتبر لاغية)
37	✓	
15	✓	
45	✓	
83	x	(تعتبر لاغية)
50	✓	

والشركات الثلاث الأولى المختارة هى 46 ، 37 و 15 . وعند استخدام الجدول فى المرة التالية نبدأ من الرقم التالى لآخر رقم اخترناه فى المرة السابقة .

(ب) المعاينة المنتظمة

تتوقف الامكانية العملية لتنفيذ خطة معاينة عشوائية بسيطة على حجم المجتمع ، وعلى حجم العينة المطلوبة .
 مثال ٦-٢-١٧ حدد طريقة المعاينة التى تعتبرها مناسبة لاختيار عينة لاجراء المسح التالى ثم قيم الطريقة :
 . . . الحصول على معلومات بشأن الحالة الصحية الحالية للعاملين السابقين فى احدى الصناعات والذين أقمدهم عن العمل مرض مشترك . ومن المعروف أن 5000 شخص قد أقمدهم المرض فى الفترة المعينة ، وأن عينة من 250 شخصاً تعتبر كافية .

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة إذا أردنا استخدام المعاينة العشوائية البسيطة فى هذه الحالة فلئنا يجب أن نعد قائمة بأسماء العاملين الذين يبلغ عددهم خمسة آلاف ، وأن نرقمهم ثم نختار 250 رقماً من بينهم باستخدام جداول الأرقام العشوائية . ومن الواضح أن هذه العملية متعبة .

وهناك طريقة أخرى وهى حساب k وهى نسبة العدد الكلى للمجتمع إلى عدد العينة المطلوبة أى .

$$k = \frac{5000}{250} = 20.$$

ثم نختار العاملين بمعدل واحد لكل k فرداً بادئين بأحدهم نختاره عشوائياً . فلذا كان الفرد الذى اخترناه عشوائياً هو رقم 16 مثلاً (وهو أحد الأرقام الواقعة بين 1 و 20) فإن باقى أفراد العينة هم الأرقام 36، 56، 76، 16 . وتسمى هذه الطريقة

لاختيار العينة « بالمعانة المنتظمة » . وهذه الطريقة بسيطة وشائعة الاستخدام عمليا . ومع ذلك فإنه يجب الحذر عند استخدام هذه الطريقة حتى لا تتفق الأرقام المختارة مع انتظام معين موجود في القائمة .

(ج) المعانة الطبيعية

يمكن زيادة دقة نتائج المعانة بزيادة حجم العينة ، ولكن هذا سيزيد من التكاليف في نفس الوقت . وهناك طريقة لزيادة الدقة دون زيادة حجم العينة وهي التقسيم إلى طبقات . وتضمن هذه الطريقة أن العينة تمثل كل قطاعات المجتمع جيدا .

مثال ٦-٣: لنفرض أننا نريد اختيار عينة من 400 موظف من شركة كبيرة - نوعا - لتحديد موقفهم من نظام جديد لحوافز الانتاج . ونتوقع أن العاملين الرئيسيين الذين سيحددان موقف الموظفين من النظام هما درجة مهارتهم وجنسهم . وتوضيح سجلات الشركة أن موظفي الشركة ينقسمون ، كما يلي :

الجنس	العدد
ذكور	
مهرة	330
نصف مهرة	660
غير مهرة	1020

بين كيف يمكن اختيار العينة لضمان أن تكون ممثلة للمجتمع .

الاجابة : لو أخذنا عينة عشوائية بسيطة (أو عينة منتظمة) من هذا المجتمع ، فقد تبدو غير ممثلة ؛ وعلى سبيل المثال فقد لا يكون هناك نساء في العينة مع أن عددهن بين العاملين كبير . وكل الذي يمكن أن يقال في هذه الحالة هو أن عينة غير مرغوبة قد سحبت .

وحتى نجعل العينة أفضل تمثيلا نستخدم المعانة الطبيعية . وتقسيم المجتمع إلى طبقات يعنى ببساطة أنه قبل اختيار العينة ينقسم المجتمع الى عدد من الطبقات ثم تؤخذ عينة عشوائية من كل طبقة . فإذا كان عدد المفردات المأخوذة من كل طبقة يتناسب مع عدد مفردات الطبقة تسمى هذه العملية معانة طبقية متناسبة ، والا فإنها تسمى معانة طبقية غير متناسبة .

وفي حالة المعانة الطبيعية المتناسبة تكون نسبة العينة ثابتة لكل الطبقات ، أى أن

$$k = \frac{\text{حجم العينة المأخوذة من طبقة}}{\text{الحجم الكلى للطبقة}}$$

وفي المثال السابق لدينا ست طبقات . فإذا كان المطلوب عينة من 400 من العاملين ، فإن نسبة المعانة تكون

$$\frac{1}{15} = \frac{400}{6000} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}}$$

وبالتالي فإننا نحتاج لمينة من كل طبقة حجمها هو $1/15$ من حجم الطبقة . وعلى سبيل المثال ، فإننا نأخذ عينة من طبقة الذكور المهرة حجمها هو $160/15 = 2400$ ونفس الطريقة نحصل على حجم المينة لكل طبقة ، كما يلي :

	اناث	ذكور
مهرة	22	160
نصف مهرة	44	86
غير مهرة	68	20

ويجب أن نؤكد على اختيار العينات من كل طبقة عشوائيا . وهي تختلف بذلك عن المعاينة بالحصة النسبية التي سنسعملها فيما بعد . وتستخدم طريقة المعاينة الطبقة العشوائية كثيرا في الحياة العملية . ويفضل أن يقسم المجتمع إلى طبقات على أساس عوامل متصلة بالموضوع الجاري بحثه . وعلى سبيل المثال : إذا كان مطلوبنا معرفة رأى الناس في الحكومة بواسطة استقصاء الرأى في المنازل ، فيجب التأكد من استقصاء بعض الآراء في المناطق المعروفة بانتمائها لحزب المحافظين ، واستقصاء البعض الآخر في المناطق المعروفة بانتمائها لحزب العمال .

(د) المعاينة المتقوية

المعاينة المتقوية هي طريقة لاختيار المفردات فيها منفصلة ، وإنما في مجموعات (أو عنقيد) .

مثال ٦-٢-٤: حدد طريقة المعاينة التي تعتبرها مناسبة لاجراء المسح التالى . ثم قيم الطريقة :

...
للمعاونة مجلس مدينة تعتبر من المصايف المحبوبة بشأن حملة دعائية مقترحة للمصيف بتزويده بالمعلومات عن أماكن الإقامة المتاحة للزوار والسباح خلال الموسم القادم .

(م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

الاجابة : لنفرض أن بالمدينة 10 000 مسكن مسجلة في سجلات مناسبة وأنه مطلوب اختيار عينة من 500 . فإذا اخترنا 500 مسكنا طبقا لطريقة معاينة عشوائية بسيطة ، فإن جمع المعلومات سيكون صعبا لأن هذه المساكن ستكون غالبا مبعثرة على مساحة المدينة كلها . ولأشك أنه سيكون من الأنسب أن تكون المساكن الخمسمائة مركزة في مناطق معينة بالمدينة . لذا تقسم المدينة إلى 1000 منطقة بكل منطقة 10 مساكن ، ثم نختار عشوائيا 50 منطقة من المناطق الألف ، ونجمع المعلومات عن كل المساكن بالمناطق المختارة وبهذه الطريقة يمكن تخفيض الوقت والتكاليف اللازمة .

ومن المفيد عند استخدام المعاينة المتقوية أن تكون المفردات لكل من العناقيد (أو التجمعات) مختلفة ، فإذا كانت المفردات التي عددها m في كل من العناقيد التي عددها m مختلفة ، فإننا نحصل على عينة حجمها $m \times m$ من المفردات . وبالعكس إذا كانت مفردات كل عنقود متشابهة ، فإننا نحصل عمليا على عينة مكونة من m من المفردات المختلفة فقط .

وتستخدم المعاينة المتقوية لأنها تحتاج الى جهد ادارى أقل ، كما أنها أقل تكاليف من أنواع المعاينات الأخرى . ومن الأسباب الهامة لاستخدام المعاينة المتقوية هي أنه قد لا يكون هناك بديل آخر . ومن الأمثلة التقليدية لذلك حالة أخذ عينة كبيرة من العمال في صناعة معينة . ومن المتوقع في هذه الحالة أننا نستطيع الحصول على قائمة بأصحاب المصانع ، ولكننا لا نستطيع الحصول على قائمة بأسماء العاملين بتلك المصانع وفي مثل هذه الحالة فإن الطريقة الوحيدة لأخذ المينة هي باختيار عدد من المصانع عشوائيا ، ثم الاتصال بالمعلمين بها .

(هـ) المعاينة متعددة المراحل

في العادة يكون مطلوباً في بحوث السوق أن نحصل على نتائج عن البلاد ككل . وهذا يعني أن المجتمع الذي يهتما على درجة من الكبر والانتشار . وبالطبع فإن السفر إلى كل أنحاء البلاد عملية مرهقة ومكلفة ، ولذلك فمن الأنسب أن تكون العينة مقصورة على أجزاء معينة من البلاد . ويمكن تحقيق ذلك باستعمال المعاينة متعددة المراحل كما سنوضحها في المثال التالي :

مثال ٦-٢-٥: حدد طريقة المعاينة التي تعتبرها مناسبة لإجراء المسح التالي ، ثم قيم الطريقة :

... التأكد بصفة عاجلة من عدد قراء مجلة أسبوعية مخصصة أساساً للبرامج التفضيلية للراديو والتلفزيون مع بعض المقالات عن البرامج والفنانين .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

الاجابة : المجتمع الذي يهتما هنا هو كل الأسر في البلاد . ولأنك أنه من المكلف جداً أخذ عينة عشوائية من كل الأسر ، كما أن هذا يستغرق وقتاً طويلاً جداً . ومن المنطقي في هذه الحالة أن نستخدم أسلوباً موسعاً من طريقة المعاينة المتعددة كما يلي :

في البداية نختار عينة عشوائية من الأقاليم (مثل كنت وديورست وستافورد شاير) . ثم نقسم كل إقليم من الأقاليم المختارة إلى عدد من المناطق التي نختار منها العينات عشوائياً. ويمكن بعد ذلك تقسيم المناطق إلى وحدات أصغر (كالشوارع مثلاً) ونختار العينات منها عشوائياً وتستمر العملية على مراحل بالعدد اللازم . وفي كل مرحلة نختار عشوائياً ثلاث أو أربع مفردات حتى نصل في النهاية إلى عدد من الأسر ليست معزولة بدرجة كبيرة عن باقي الأسر في العينة . وتسمى هذه الطريقة بالمعاينة المتعددة المراحل .

والآن سنتناول باختصار طرق المعاينة التقديرية . والعبء الرئيسي لهذا النوع من المعاينة هو أننا لا نستطيع الحصول على تقدير لدقة النتائج . ومن طرق المعاينة التي تدخل ضمن طرق المعاينة التقديرية الطريقة التالية :

(و) معاينة الحصة النسبية

هذه الطريقة للمعاينة متصلة اتصالاً وثيقاً بالمعاينة الطبقة العشوائية وتستعمل على نطاق واسع في كل من بحوث الرأي العام وبحوث السوق . وتختلف هذه الطريقة عن المعاينة العشوائية في أن العينات لا تختار عشوائياً من الطبقات . وفي العادة فإن الطبقات تحدد ثم تحسب أحجام العينات الطبقة اللازمة للمحافظة على التناسب بمعلومية الحجم الكلي للطبقات في المجتمع . وبعد ذلك يترك الاختيار الفعلي للمفردات في كل طبقة لتقدير الباحثين .

مثال ٦-٢-٦: بين الجدول التالي تقسيم مجتمع ما إلى نوعيات حسب الجنس والعمر وحسب كون الفرد مدخناً ، أو غير مدخن (والتكرار المعطى بالآلاف) .

		العمر		الإجمالي
		21-40	أكثر من 40	
ذكور	مدخن	61	45	106
	غير مدخن	41	27	68
إناث	مدخنة	68	56	124
	غير مدخنة	59	43	102

والمطلوب

- ١ - تكوين عينة بالحصة النسبية من 100 فرد بحيث تمكس جيدا توزيع هذه الخصائص الثلاث في المجتمع . احسب الأعداد المطلوبة في كل نوعية من نوعيات العينة .
 - ٢ - اذا فرضنا أن العمر ليس هاما لهذه الدراسة ، فكيف يتأثر تركيب العينة في هذه الحالة ؟
 - ٣ - ماهو النقد الأساسي الذي يمكن أن يوجه الى المعاينة بالحصة النسبية ؟
- (ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٧)

الإجابة

- ١ - نستطيع أن نمكس صورة المجتمع جيدا اذا أخذنا عينة يكون عدد الأفراد بها متناسبا مع عددهم في كل نوعية . ولما كان حجم المجتمع هو 400 000 فإن نسبة العينة $1 / 4000 = 100 / 400 000$ وبعد التقريب لأقرب عدد صحيح نحصل على التوزيع التالي لأفراد العينة على النوعيات المختلفة .

	العمر	
	21-40	أكثر من 40
ذكور مدخنون	15	11
ذكور غير مدخنين	10	7
إناث مدخنات	17	14
إناث غير مدخنات	15	11

- وبعد ذلك تبدأ جمع المعلومات باعطاء التعليمات للبحاث لاستيفاء الحصص المقررة لكل نوعية . والمتنظر عندئذ أن كل باحث سيحاول قرع أبواب السكان ، أو سؤال المارة في الشوارع الرئيسية حتى يحصل على عدد الاجابات المطلوبة لكل نوعية .
- ٢ - اما اذا لم تكن للعمر أية أهمية فاننا نجمع العمودين الموجودين بالجدول لنحصل على :

ذكور مدخنون	26
ذكور غير مدخنين	17
إناث مدخنات	31
إناث غير مدخنات	26

- ٣ - من وجهة النظر المتعلقة بنظرية الاحتمالات ، فإن عدم عشوائية المعاينة بالحصة النسبية تعد نقطة ضعف خطيرة . والعينات التي تختار بهذه الطريقة معرضه لخطر التشوه . ويرى بعض الخبراء أن الانحياز الناتج في هذه الحالة يجعل هذه الطريقة من طرق المعاينة عديمة الفائدة . ومع ذلك فيجب أن نشير إلى أن كثيرا من باحثي السوق والاداريين الذين يقومون عمليا بإجراء الدراسات الاحصائية يؤيدون هذه الطريقة لما تمتاز به من بساطة ورخص وسرعة .

تمرين ٦-١ : اكتب مذكرات مختصرة توضح معنى كل من المصطلحات التالية :

(أ) المعاينة العشوائية .

(ب) المعاينة الطبقية .

(ج) المعاينة بالحصة النسبية .

(د) المعاينة المنتظمة .

٦-٣ الاستقصاءات

من العوامل الهامة التي تلعب دورا كبيرا عند اجراء دراسة احصائية طريقة جمع البيانات وتصميم الاستقصاءات . وسنوضح عن طريق المثال التالى الكثير عن هذين العاملين .

مثال ٦-٣-١

- (أ) الاستقصاءات البريدية والمقابلات طريقتان لجمع البيانات . افكر مزايا كل طريقة .
 (ب) أحد العيوب الأساسية للمسح الاحصائى بواسطة المقابلات هو فى انحياز القائم بالمقابلة . ما هو هذا الانحياز ، وكيف يمكن تقليله الى الحد الأدنى ؟
 (ج) ما هى العناصر الأساسية التى يجب اعتبارها عند تصميم استقصاء بريدى ؟
 (٢٢ م أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

الاجابة :

(أ) ان عدم كفاءة طرق جمع البيانات تقلل كثيرا من قيمة أى مسطح احصائى . والطريقتان الرئيسيتان لجمع البيانات لهذا الغرض هما الاستقصاء البريدى والمقابلات . ولكل من هاتين الطريقتين مزاياه ويتوقف استعمال احدى الطريقتين على ظروف المسح .

والاستقصاء البريدى أرخص كثيرا فى التنفيذ من المقابلات الشخصية وقد يكون انخفاض التكاليف هو العنصر الحاسم الذى يجعلنا نفضل الاستقصاء البريدى فى كثير من المواقف ، وخاصة عندما تكون الميزانية محدودة ، أو عندما يكون المجتمع مبعثرا على نطاق واسع . ومن جهة أخرى يمكن زيادة حجم العينة لجعل النتائج أكثر وثوقا . وبالإضافة الى كون الاستقصاء البريدى أرخص ، فانه كذلك يسمح بجمع البيانات بسرعة معقولة . ويمكن عادة أن نتوقع وصول معظم الردود خلال أسبوعين من ارسال الاستقصاء . وللاستقصاء ميزة اضافية ، وهى عدم وجود مقابلة شخصية قد تؤثر على اجابة الأشخاص الذين يردون على الاستقصاء . ومن المعلوم أن طريقة طرح السؤال قد تؤثر على الاجابة .

والمشكلة الرئيسية للاستقصاء البريدى هى صعوبة الحصول على معدل معقول للردود . ويعتبر الحصول على ردود بنسبة عشرين فى المائة جيدا بالنسبة للاستقصاءات البريدية . وليست مشكلة انخفاض معدل الرد راجعة الى قلة البيانات بقدر ما ترجع الى أن الأشخاص الذين لا يردون على الاستقصاء قد يكونوا غير ممثلين للمجتمع مما يجعل النتائج منحازة .

والميزة الأساسية للمقابلة الشخصية هى أنها تعطى عادة معدلا عاليا للرد . ويبدو أنه أسهل أن يتمتع الناس عن الرد على استقصاء بريدى من أن يرفضوا المقابلة الشخصية وبالإضافة الى ذلك ، فان وجود القائم بالمقابلة الشخصية يساعد الشخص الذى يتولى الاجابة على توضيح أى غموض بالأسئلة .

والعيب الرئيسى فى طريقة المقابلة الشخصية هو ارتفاع تكاليفها . ويرجع هذا ليس فقط الى أجور وبدلات سفر القائمين بالمقابلة ، وانما أيضا الى تكاليف تدريبهم .

(ب) عند جمع البيانات بطريقة المقابلة الشخصية يمكن أن ينشأ الانحياز من مصدرين . فلما كان الانحياز صادرا عن الشخص الذى يجب فانه يكون عادة ناتجا عن نقص فى معلوماته ، أو ضعف فى ذاكرته ، وقد يكون ناتجا عن عدم رغبته فى اعطاء اجابة صحيحة . وبالإضافة الى ذلك فان القائم بالمقابلة يمكن أن يؤثر على الاجابة .

ومن الضروري أن يوجه القائم بالمقابلة الأسئلة بطريقة محايدة وألا يطرحها بطريقة تجعل الشخص الذي يجيب يحس بأنه يجب أن يعطي اجابة معينة . وهناك صورة أخرى لانهياز القائم بالمقابلة تظهر في تدوينه للاجابات المحدية . فقد يحدث أن اجابة لأحد الأشخاص لا تقع بوضوح في إحدى النواعيات المذكورة في الاستقصاء وعندئذ يستخدم القائم بالمقابلة تقديره الشخصي لوضعها باحدى النواعيات .

وهناك طريقتان أساسيتان لاستبعاد انهياز القائم بالمقابلة . والطريقة الأولى هي أن تجعل القائمين بالمقابلة يشتركون في برنامج تدريبي مسطط . وفي هذا البرنامج يمكن تدريبهم على تكوين علاقة طيبة مع الأشخاص الذين يجيبون على الاستقصاء ، وعلى توجيه الأسئلة بطريقة لطيفة ، ولكنها محايدة ، وعلى مواجهة العقبات التي قد تصادفهم . والطريقة الثانية ، لتقليل انهياز القائم بالمقابلة هي بصياغة الأسئلة بطريقة تستبعد الغموض تماما .

(ج) قبل بحث موضوع تصميم نماذج الاستقصاء يجدر بنا أن نتناول بعض المواضيع الجانبية المتصلة بالاستقصاءات البريدية . وأولا يجب أن يكون هناك خطاب مرفق بنموذج الاستقصاء يوضح الغرض من اجراء المسح الاحصائي ، ويضمن المجيبين على الاستقصاء على بقاء هويتهم مجهولة . وبالإضافة الى ذلك يجب أن يتضمن الخطاب منظورا ممنونا ، وعليه طابع بريد للرد فضلا عن مكافأة ما في مقابل الرد ، وليس ضروريا أن تكون هذه المكافأة في صورة نقود . بل يمكن أن تكون في شكل هدية رخيصة كقلم مثلا ، أو تذكرة للاشتراك في مسابقة للحصول على جوائز قيمة . ويقصد بهذه الجوانب أن تحقق أعلى معدل ممكن للرد .

أما بالنسبة للاستقصاء البريدي ذاته ، فيجب أن يعمم بأوضح صورة ممكنة مع استخدام الحروف الكبيرة والطباعة بينط أسود لايراز الكلمات والتعليمات الهامة . ويجب أن تكون الأسئلة مصاغة بحيث تسهل الاجابة عليها ، وأن يكون عدد الأسئلة أقل ما يمكن . ويجب مراعاة النقاط التالية عند صياغة الأسئلة :

١ - يجب أن تكون اللغة المستخدمة واضحة ودقيقة ، وأن يستطيع أى شخص من الذين سيجيبون على الاستقصاء فهمها . وعلى سبيل المثال : يفضل استخدام كلمة « يقول » بدلا من « يخبر » و « يصرف » بدلا من « يتفق » وهكذا .

٢ - يجب أن يتجنب كاتب الاستقصاء توجيه الأشخاص الذين سيجيبون عليه وجهة معينة في الاجابة كأن يقول « ألا تظن أن . . . ؟ » .

٣ - يجب عدم الاعتماد على ذاكرة الشخص الذي يجيب على الاستقصاء أكثر من اللازم . فعند توجيه سؤال مثل « كم من المال صرفت على الطعام في الأسبوع الماضي ؟ » يمكن أن تتوقع اجابة دقيقة الى حد ما . أما اذا كان السؤال هو « كم من المال صرفت في أسبوع مناظر في العام الماضي ؟ » فان الاجابة لن تكون ذات قيمة .

٤ - استخدام الأسئلة ذات الاجابات المصنفة سلفا مريح للشخص الذي يجيب على الأسئلة . وعلى سبيل المثال : كم عدد الموظفين لديك ؟ ضع علامة في المربع المناسب .

أكثر من 900

☐

من 101 الى 900

☐

أقل من 100

☐

كما أن الاجابات المصنفة سلفا تجعل التحليل أكثر يسرا .

تمارين:

٦- ١ شركة صناعية كبرى ترغب في إجراء مسح إحصائي للعاملين بها الذين يتلقون أجورهم بالساعة مع توضيح بعض الجوانب بصفة خاصة مثل شكل الأسرة ، وظروف السكن ، والالتزامات المالية . ويفرض أن كل نشاطات الشركة مركزة في منطقة جغرافية واحدة :

(أ) صمم نظاما للمسح بالعينة على اساس عينة عشوائية بسيطة للحصول على المعلومات اللازمة .

(ب) كيف تحدد الحجم المناسب للعينة لهذا الغرض ؟

(ج) ما مزايا وعيوب مثل هذا المسح بالعينة بالمقارنة بإحصاء كامل ؟

(م ١١ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٤)

الفصل السابع

وصف البيانات الاحصائية

٧-١ التوزيعات التكرارية

من المهام الرئيسية التي يتضمنها العمل الاحصائي أخذ مجموعة من البيانات ومعالجتها بحيث تصبح خصائصها الرئيسية واضحة جلية . وهناك عدة جوانب لهذه المعالجة منها المدى ومنها المتصل بالرسم البياني .

جداول التكرار أبسط صورة يمكن أن تصادفنا فيها البيانات هي أن تكون بشكل مجموعة من الأعداد . ولذلك سنبدأ باعتبار مجموعة من الأعداد لنرى الخطوات الأولى للمعالجة الاحصائية . وفيما يلي قيم عروض الأسعار التي تقلعت بها شركة مافي يوم من الأيام .

£	£	£	£	£	£	£	£	£	£
17.35	6.80	9.05	14.80	24.70	23.45	29.90	9.95	15.90	22.40
16.45	11.50	17.55	18.60	9.40	13.35	26.60	6.65	10.25	19.00
23.95	18.45	12.70	19.05	15.15	18.30	15.16	12.80	23.40	5.55
8.75	18.80	20.45	15.80	22.50	19.10	14.55	11.15	16.35	26.60

وعندما ننظر القارئ العادي الى مجموعة من 40 عددا مكتوبة بهذه الطريقة فإنها لا تعطيه أى انطباع مفيد .

وأول خطوة تتخذ لجعل هذه الأعداد أكثر قابلية للمعرض على شخص ما هي تحويلها الى صورة جداول للتكرار .

وهذا يعنى تقسيم المدى الذى تعطيه البيانات إلى عدة فترات أو فئات وعد قيم البيانات التى تقع فى كل فئة . ويسمى هذا العدد بالتكرار الففوى .

والبيانات المعطاه هنا تتراوح من £5.55 الى £29.90 ، ومن الواضح أن هناك طرقا عديدة لتقسيم هذا المدى إلى

فئات . كما أنه لا يوجد إجماع على طريقة موحدة لتحديد الفئات . ولنتبعر التقسيم التالى ، وهو أسلوب شائع الاستخدام .

الفئة
2 £ وأقل من 6 £
6 £ وأقل من 10 £
10 £ وأقل من 14 £
14 £ وأقل من 18 £
18 £ وأقل من 22 £
22 £ وأقل من 26 £
26 £ وأقل من 30 £

وبالنسبة للفئات المحددة بهذه الطريقة ، فإن القيم المذكورة على اليسار ، وهي £2،£6،£10،£14،£18،£22 و£26 تسمى الحدود الدنيا للفئات أما القيم المذكورة على اليمين فتسمى الحدود العليا للفئات .

والواقع أن هذا التقسيم للفئات يجعلنا نطرح الأسئلة التالية :

- ١ - لماذا سبع فئات ؟
- ٢ - لماذا كانت الفئات جميعا متساوية في الحجم ؟

وفيما يتعلق بالسؤال الأول ، فإنه لا توجد قاعدة ثابتة بشأن عدد الفئات التي يجب استخدامها ، ولكن المعتاد ألا تقل عن خمس ، وألا تزيد عن خمس عشرة . إذ أن استخدام أقل من خمس فئات لا يعطى تميزا كافيا ، أما استخدام أكثر من خمس عشرة فئة ، فإنه يؤدي إلى صعوبة في الاستيعاب ، وبذلك يفقد الجدول التكرارى السبب في وجوده .

أما بالنسبة للسؤال الثانى ، فإن جعل الفئات متساوية في الحجم يسهل الخطوات التالية كما سنرى فيما بعد . وليس عمليا بالنسبة لبعض البيانات أن تكون كل الفئات متساوية في الحجم ، ولكننا سنتناول هنا الحالات التي تكون الفئات فيها متساوية فقط .

وهناك مصطلحان إضافيان يجب أن يتعلمهما القارىء في هذه المرحلة وهما :

- (أ) طول الفئة ، وهو الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى .
- (ب) مركز الفئة ، وهو القيمة الواقعة في المنتصف بين الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة .

ويعد أن انتهينا من التقسيم إلى فئات نقوم بعد البيانات الواقعة في كل منها . والطريقة المعتادة لاجراء ذلك هي أن يكون لدينا عمود في الجدول معاروف لعمود الفئات ويمتد هذا العمود باسم « علامات المد » ثم نتناول الأرقام الواردة بالبيانات الأصلية واحدا تلو الآخر ، فنشطب الرقم ونضع علامة مقابلة له في عمود علامات المد في الفئة التي يتدرج تحتها ، ومن المفيد لتسهيل المد أن نستخدم طريقة البوابة ذات الخمسة قضبان وفيها نضع رقم (1) أو شرطة رأسية لكل مرة يقع فيها الرقم في الفئة حتى اذا وضعنا أربعة شرطيات وجاء دور الخامسة توضع شرطة مائلة تقطع الأربعة السابقة . ويكون عدد علامات المد المسجل مقابلا كل فئة هو تكرار الفئة . وبالنسبة للمثال الممضى يكون لدينا

التكرار .	علامات المد	الفئة
1	1	£ 2 وأقل من £ 6
6	++++ 1	£6 وأقل من £10
6	++++ 1	£10 وأقل من £14
10	++++ +++++	£14 وأقل من £18
8	++++ 111	£18 وأقل من £22
6	++++ 1	£22 وأقل من £26
3	111	£26 وأقل من £30

وهذا عبارة عن جدول للتكرار للبيانات المعطاه .

وقبل أن نترك موضوع الجداول التكرارية سنتناول ما يسمى بجدول التكرار المتجمع . وللحصول عليه نعيد ترتيب الفئات في جدول التكرار العادى . وبالنسبة للمثال المطروح كانت لدينا فئات هي £2 وأقل من £6،£6 وأقل من £10، £10 وأقل من £14 ، £14 وأقل من £18 وهكذا .

وللحصول على جدول التكرار المتجمع المقابل نأخذ الفترات التالية : أقل من £6 أقل من £10 ، أقل من £14 ، أقل من £18 وهكذا .

وسيكون عدد البيانات أقل من £6 هو نفس عددها في الفئة £2 وأقل من £6 ، وعدد البيانات أقل من £10 هو مجموع العددين في الفئة £2 وأقل من £6 والفئة £6 وأقل من £10 وهكذا

وهكذا ، فإننا نحصل على تكرارات جدول التكرار المتجمع بتجميع التكرارات الواردة في جدول التكرار العادي . وبالنسبة للمثال المذكور يكون لدينا جدول التكرار المتجمع التالي :

التكرار	المدى
1	أقل من £ 6
7	أقل من £10
13	أقل من £14
23	أقل من £18
31	أقل من £22
37	أقل من £26
40	أقل من £30

ويحدد أكثر نقول أن هذا جدول للتكرار المتجمع من النوع « أقل من » ويمكن الحصول على نوع ثان من جداول التكرار المتجمع بتجميع التكرارات بدءا من نهاية الجدول ، وصعودا إلى أعلى :

التكرار	المدى
40	£ 2 أو أكثر
39	£ 6 أو أكثر
33	£10 أو أكثر
27	£14 أو أكثر
17	£18 أو أكثر
9	£22 أو أكثر
3	£26 أو أكثر

وهذا جدول للتكرار المتجمع من النوع « أو أكثر » . وهذا النوع أقل شيوعا بكثير من النوع « أقل من » ولهذا يستخدم مصطلح جدول التكرار المتجمع ليدل على النوع « أقل من » دون لبس .

وأحيانا يكون هاما أن نكون جدولا للنسبة المئوية للتكرار . ويتم ذلك بتحويل التكرارات المعطاة في جدول التكرار العادي وتسمى أحيانا بالتكرارات المضمم إلى نسب مئوية من التكرار الكلى باستخدام القاعدة .

$$\text{النسبة المئوية للتكرار} = \frac{\text{التكرار الخام}}{\text{التكرار الكلى}} \times 100$$

وتحويل التكرار الأول في المثال بهذه الطريقة يعطى $2.5\% = 100 \times \frac{1}{40}$ ويعطى تحويل التكرار الثانى $15\% = 100 \times \frac{6}{40}$ وفيما يلى جدول النسبة المئوية للتكرار كاملا :

النسبة المئوية للتكرار	الفئة
2.5	£ 2 وأقل من £ 6
15	£ 6 وأقل من £10
15	£10 وأقل من £14
25	£14 وأقل من £18
20	£18 وأقل من £22
15	£22 وأقل من £26
7.5	£26 وأقل من £30

وتسهل النسب المئوية للتكرار من مقولوة الجداول المختلفة اذا كانت التكرارات الكلية مخفظة .

ويمكن الحصول على جدول للنسب المئوية المتجمعة للتكرار اما بتجميع النسب المئوية للتكرار ، وما بتحويل التكرارات المتجمعة إلى نسب مئوية من التكرار الكلى . وبالنسبة للمثال المعطى اعلاه ، فإن جدول النسب المئوية المتجمعة للتكرار من النوع « أقل من » يكون كما يلى :

النسب	النسبة المئوية المتجمعة للتكرار
2.5	أقل من 6
17.5	أقل من 10
32.5	أقل من 14
57.5	أقل من 18
77.5	أقل من 22
92.5	أقل من 26
100	أقل من 30

تعرين ٧-١ - الأعداد الآتية - وهى مأخوذة عن الملخص الشهرى للإحصاء تبين كميات الخشب الجاف المستوردة لبريطانيا على مدى أربعين شهرا . والكميات مطبوعه بألاف الأمتار المكعبة .

95	72	85	92	102	84	94	81	88	79
93	78	82	88	94	81	86	97	76	72
87	71	95	87	84	91	82	93	67	77
86	87	66	107	98	103	85	88	99	89

باستخدام الفئات "65 وأقل من 70" ، "70 وأقل من 75" وهكذا جمع هذه البيانات لتكون جدولا تكراريا ، وجدولا للتكرار المتجمع ، وجدولا للنسب المئوية للتكرار وجدولا للنسب المئوية المتجمعة للتكرار .

٧-٢ التمثيل البياني للتوزيع التكرارى

اذا نظرنا الى جدول توزيع تكرارى ، فإننا نحصل على فكرة أفضل عن مجموعة البيانات عما اذا كانت على شكل مجموعة أعداد. ولذلك فمن المفيد أن نعلم كيف يمكن تحويل مجموعة من الأعداد إلى جدول تكرارى .

ومع ذلك ، فإننا كثيرا ما نحصل على المعلومات فى صورة جدول تكرارى من البداية والمطلوب أن نعرف ماذا يمكن عمله بعد ذلك .

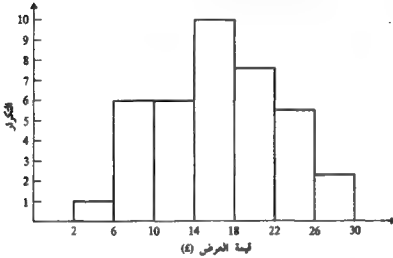
ومع أن الجدول التكرارى أسهل فى الاستيعاب من عدد من الأعداد إلا أنه لا يعطى انطباعا واضحا مثل الرسم . ولذلك سنتناول فى هذا الجزء الخطوة التالية فى عرض البيانات وهى انشاء رسومات بيانية من الجداول التكرارية .

ولتوضيح ذلك فسنناول فى هذا الجزء رسومات بيانية مبنية على الجداول التكرارية التى درسناها سابقا لبيانات عروض الأسعار .

المدرجات التكرارية : المدرج التكرارى عبارة عن رسم بياني مكون من مستطيلات كل منها يمثل واحدة من الفئات التى تنقسم البيانات إليها .

ويمكن أن نعتبر أن عرض المستطيل يتناسب مع طول الفئة التي يمثلها ، وأن مساحته تتناسب مع تكرار الفئة . ولو كانت كل الفئات بنفس الطول (وهي الحالة التي سنتناولها حاليا) فإن الأمور تكون أبسط كثيرا . وفي هذه الحالة ، فإن التعريف السابق يعني أن كل المستطيلات تكون بنفس العرض (الاختياري) وتكون أطوالها متناسبة مع تكرار الفئات . وهكذا فبالنسبة لمثال عروض الأسعار يكون لدينا المدرج الموضح بشكل ١-٧ .

ويعطى المدرج التكرارى انطباعا سريعا عن موقف البيانات التي يمثلها .



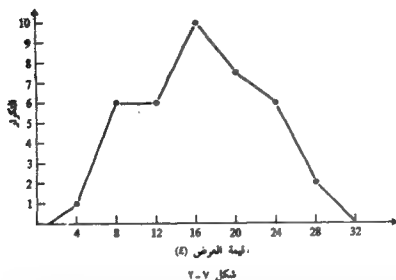
شكل ١-٧

المضلعات التكرارية : ترسم المضلعات التكرارية عامة بتوقيع « التكرار لكل وحدة من طول الفئة » مقابل « مركز الفئة » ، وذلك لكل فئة من فئات الجدول .

وبالنسبة للحالات التي تكون فيها كل الفئات بطول واحد ، فإن هذا معنى توقيع تكرار الفئة مقابل مركز الفئة . ويستكمل شكل المضلع بتوصيل النقطتين الموقعتين عند الطرفين بالمحور الأفقى على مسافة تبعد بمقدار طول فئة واحدة .

وبالنسبة لمثال عروض الأسعار يكون لدينا المضلع المبين بشكل (٢-٧) .

ونلاحظ أن النقط الموقعة للحصول على المضلع التكرارى هي منتصفات الأضلاع العلوية للمستطيلات المكونة للمدرج التكرارى المقابل . ويظل هذا صحيحا حتى فى الحالة العامة التي لا تكون أطوال الفئات فيها متساوية . ويعطى المضلع التكرارى - مثله فى ذلك مثل المدرج التكرارى - انطباعا فوريا عن صورة البيانات التي يمثلها .



مضلعات الأوجيف : هذه الرسومات البيانية ليست ذات فائدة كبيرة لاعطاء انطباع بصرى فوري عن مجموعة البيانات المدروسة ، ولكن لها قيمة كبيرة للمراحل التالية للاحصاء الوصفي كما سنرى في الفصل الثامن . ولتوضيح طريقة انشاء هذا المضلع سنعتبر المثال التالي :

عينة عشوائية من حسابات خمسين شركة للاتشاءات أعطت التوزيع التكرارى التالى عن الأرباح لعام

١٩٧٣/١٩٧٤ .

الربح (مليون £)	عدد الشركات
10 - وأقل من 5	2
5 - وأقل من 0	0
0 - وأقل من 5	2
5 - وأقل من 10	4
10 - وأقل من 15	8
15 - وأقل من 20	11
20 - وأقل من 25	13
25 - وأقل من 30	6
30 - وأقل من 35	4

(البيانات مأخوذة من ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

ولول خطوة لانشاء مضلع الأوجيف لهذا التوزيع التكرارى هى تحويله الى جدول للتكرار المتجمع . وسيكون لدينا عندئذ .

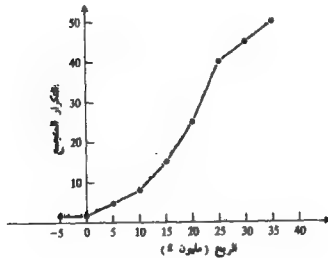
الربح (مليون £)	التكرار
-5 - أقل من	2
0 - أقل من	2
5 - أقل من	4
10 - أقل من	8
15 - أقل من	16
20 - أقل من	27
25 - أقل من	40
30 - أقل من	46
35 - أقل من	50

ونحصل على مصلع الأوجيف من هذا الجدول بتوزيع التكرار المتجمع مقابل حد الفئة ، وتوصيل النقاط بخطوط مستقيمة . والأوجيف الناتج موضح بشكل (٧-٣)

تمرين ٧-٢-١ صور البيانات التالية بيانياً بواسطة مدرج تكرارى ، ومصلع تكرارى ، ومصلع لتكرار المتجمع (أوجيف) .

الأجر الأجرى (ك)	عدد الموظفين
31 وأقل من 30	6
36 وأقل من 41	8
41 وأقل من 46	12
46 وأقل من 51	18
51 وأقل من 56	25
56 وأقل من 61	30
61 وأقل من 66	24
66 وأقل من 71	14
71 وأقل من 76	6
76 وأقل من 81	3

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٨٠)



شكل ٧-٢

٧-٣ الطرق الأخرى لتمثيل البياني

متغيرات لورنز : منحني لورنز هو وسيلة لظهور الفشابه (أو الاختلاف) في توزيع إحدى الخواص في مجتمعين مختلفين . وسنوضح طريقة انشاء واستخدام هذا المنحني بواسطة المثال التالي :

مثال ٧-٣-١ : تدهورت العلاقات الصناعية بصنع شركة جي - كي - ليمتد الموجود بقطاعه ويسكس . وقد أثبتت ادارة شئون الأفراد أن أحد العوامل المؤدية الى ذلك هو عدم المساواة في أجور العاملين التي تدفع طبقاً لنظام الحوافز .

وكان العاملون يعملون لمدة ثمانى ساعات يوميا ، وكان حافز متزوج يدفع لهم اذا زاد الانتاج الفئاسى المقابل له 360 دقيقة عمل .

وبين الجدول A اداءه موقف انتاج العاملين فى شهر يونيو ١٩٧٥ وقد تم تحسين ظروف العمل فى المواقع التى لوحظ فيها انخفاض الأداء ، ثم أعيد قياس موقف الانتاج فى أكتوبر ١٩٧٥ فحصلنا على النتائج الموضحة بجدول B .

(أ) مثل النتائج الواردة بالجدولين A و B على شكل منحنى لورنز .
(ب) علق على النتائج

النتاج المعدل مطلقا بالمقاييس الفئاسية فى اليوم	جدول A - يناير ١٩٧٥ عدد العاملين	جدول B - أكتوبر ١٩٧٥ عدد العاملين
300	10	4
320	32	11
340	20	11
360	18	9
380	2	10
400	5	12
420	5	12
440	5	11
460	3	10
480		5
500		5

(م م ت أ - الجزء ١ - نوفمبر ١٩٧٥)

الاجابة

(أ) الخطوة الاولى لانشاء منحنى لورنز هي اعداد جدول للتكرار المتجمع للمعينتين وللمثال المعطى يكون لدينا .

مطلق فئاسية	يناير ١٩٧٥ عدد العاملين	أكتوبر ١٩٧٥ عدد العاملين
300 أو أقل	10	4
320 أو أقل	42	15
340 أو أقل	62	26
360 أو أقل	80	35
380 أو أقل	82	45
400 أو أقل	87	57
420 أو أقل	92	69
440 أو أقل	97	80
460 أو أقل	100	90
480 أو أقل	100	95
500 أو أقل	100	100

والخطوة التالية التحويل إلى جدولين للنسب المئوية المتجمعة للتكرار . ولكن فى الحالة المذكورة هنا لا نحتاج لذلك حيث أن مجموع التكرارات فى المعيتين هو 100 من البداية .

ويعد الحصول على جداول للنسب المئوية المتجمعة للتكرار نقوم بإنشاء منحني لورنز بتوقيع النسب المئوية المتجمعة للتكرار للحالتين الواحدة مقابل الأخرى ثم توصيلها بمنحنى أملس . وبين الشكل (٧ - ٤) منحني لورنز للمثال المذكور .

(ب) لو كانت الانتاجية في الحالتين واحدة لكان منحني لورنز متطابقا على الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (0,0) و (100 , 100) . ولهذا فإن هذا المستقيم يسمى خط التوزيع المتساوي .

ويدل الفرق بين منحني لورنز المرسوم فعلا وبين خط التوزيع المتساوي على مدى الاختلاف بين التوزيعين . وبالتالي فإن المساحة بين المنحنى وبين هذا المستقيم تسمى « بمساحة عدم التساوي » .

وفي المثال المذكور تعكس مساحة عدم التساوي التحسن الذي حدث في الانتاجية في الفترة من يونيو الى أكتوبر .

ونلاحظ أن منحني لورنز ليس إلا وسيلة للتوضيح البصري ، ولا يمكن الحصول على نتائج عددية ذات دلالة من اتساع مساحة عدم التساوي .

تعرين ٣-١: يبين الجدول التالي الضرائب التي تحصل من المواطنين من مختلف شرائح الدخل في عينة من 2000 مواطن . أنشئ منحني لورنز للبيانات المعطاه بالجدول وعلق عليه .

اجمالي الضريبة التي تدفعها المجموعة (ك)	عدد الأفراد	اجمالي الدخل السنوي (ج)
30 000	140	أقل من 3 000
100 000	520	3 000 وأقل من 4 000
330 000	620	4 000 وأقل من 5 000
350 000	440	5 000 وأقل من 7 000
370 000	240	7 000 وأقل من 10 000
340 000	40	10 000 وأقل من 16 000

الرسومات البيانية للسلاسل الزمنية والرسومات نصف اللوغاريتمية: سنتناول السلاسل الزمنية بالتفصيل في الفصل العاشر ، ولكننا سنوضح الآن ماهية السلاسل الزمنية ، وسندرس بعض الرسومات البيانية البسيطة المستخدمة لتمثيل هذا النوع من البيانات .

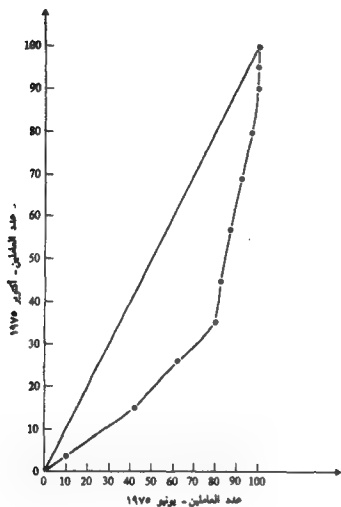
السلاسل الزمنية عبارة عن مجموعة من البيانات المتعلقة بفترات زمنية ما . وفي معظم الأحوال ، تكون الفترات الزمنية متساوية ، وعلى سبيل المثال كل شهر ، أو كل ثلاثة أشهر ، أو كل سنة لمدة معينة . وتظهر معظم الاحصائيات المنشورة على شكل سلاسل زمنية . وعلى سبيل المثال ، فإن الرقم القياسي لأسعار التجزئة ينشر كل شهر .

وتمثل السلاسل الزمنية برسم بياني يوقع الزمن على المحور الأفقي وقيم المتغير على المحور الرأسي .

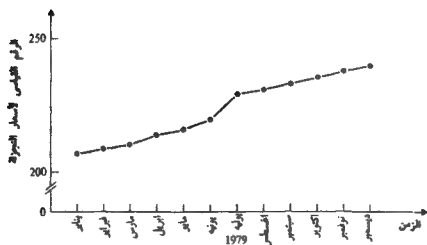
وبالشكل ٧-٥ مثال بسيط لرسم بياني لسلسلة زمنية . وهذا الرسم منشأ على أساس قيم الرقم القياسي لأسعار التجزئة لشهور عام ١٩٧٩ .

أما الرسم البياني نصف اللوغاريتمي ، فهو نوع آخر من هذه الرسومات توقع فيه على المحور الرأسي قيم لوغاريتمات المتغير بدلا من المتغير ذاته . ويوقع الزمن على المحور الأفقي كما سبق .

وأكثر استخدامات الرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية شيوعا هو لاجراء المقارنات بين السلاسل الزمنية . وسندرس كمثال أحد هذه الرسومات البيانية ، ثم نتاقش الفكرة وراءه .



شكل ٧ - ٤



شكل ٧ - ٥

وهناك طريقتان لتوقيع القيم : الأولى هي إيجاد قيم لوغاريتمات المتغير ، ثم توقيعها على ورق رسم بياني عادي .
والثانية هي باستخدام ورق رسم بياني نصف لوغاريتمى . وهو ورق معد بحيث تكون المسافات على أحد المحورين
مساوية لقيم لوغاريتمات الأعداد المكتوبة . وفيما يلي سنتبين استخدام الطريقتين للبيانات التالية .
باعتبارك محاسباً بإدارة شركة Z ليمتد أعطيت الاحصائيات التالية عن إنتاج أحد منتجاتها الكهربائية النمطية التي
تعد للسوق المحلية .

السنة	إنتاج القابل للبيع بالآلاف	متوسط عدد عمال التجميع	متوسط الإنتاج اليومي للعامل	أجر العامل في الساعة بالدينار
1971	362	62	26	55
1972	358	60	26	58
1973	366	60	27	62
1974	365	56	28	67
1975	370	55	29	74
1976	367	52	31	90

(البيانات مأخوذة من م ١ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

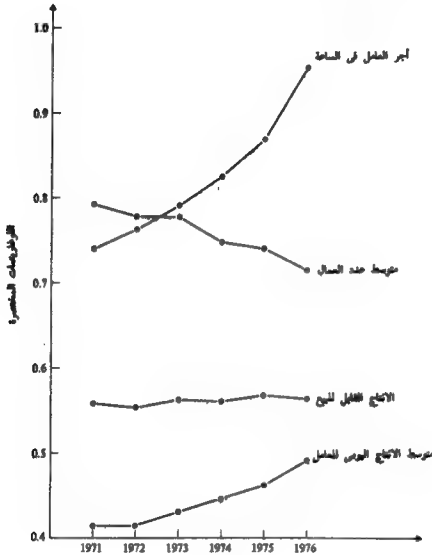
والآن سنقارن بين التغيرات التي حدثت في كل من المتغيرات الأربعة على مدى فترة السنوات الست بتوقيعها جميعاً على
ورق رسم بياني نصف لوغاريتمى . ثم سنعتبر مزايًا وعيوب هذا النوع من الرسم البياني بالمقارنة بالرسم البياني العادي
لسلسلة زمنية . ولتوقيع الرسم البياني النصف لوغاريتمى على ورق رسم بياني عادي يجب أولاً إيجاد لوغاريتمات الأعداد
كلها :

السنة	لوغاريتم الإنتاج القابل للبيع بالآلاف	لوغاريتم متوسط عدد عمال التجميع	لوغاريتم متوسط الإنتاج اليومي للعامل	لوغاريتم أجر العامل في الساعة بالدينار
1971	2.5587	1.7924	1.4150	1.7404
1972	2.5539	1.7782	1.4150	1.7634
1973	2.5635	1.7782	1.4314	1.7924
1974	2.5623	1.7482	1.4472	1.8261
1975	2.5682	1.7404	1.4624	1.8692
1976	2.5647	1.7160	1.4914	1.9542

وعند مقارنة الرسومات البيانية للنصف لوغاريتمى الأربع فإننا نهتم بالميل من القيم المختلفة أكثر اهتماماً بالقيم ذاتها .
ولذلك فقبل توقيع القيم من المفيد أن نختصر الجزء من اللوغاريتمات الموجود قبل العلامة العشرية وذلك بطرح أصغر
الاجزاء في كل مجموعة من اللوغاريتمات من الباقية . ونتيجة ذلك هي تحريك الرسومات البيانية إلى أسفل على الورقة
مما يقربها من بعضها ويسهل مقارنتها . وبين شكل (٧-٦) الرسم البياني نصف اللوغاريتمى بعد اختصار
اللوغاريتمات بهذه الطريقة .

أما إذا كنا نستخدم ورق رسم بياني نصف لوغاريتمى ، فإننا نقرب الرسومات من بعضها لتسهيل المقارنة بواسطة
إيجاد أكثر من مقياس للقيم على المحور الرأسي . بالنسبة للمثال المذكور يمكن توقيع بيانات الإنتاج على جزء من
الورقة بترقيم هذا الجزء من 100 إلى 1000 في حين توقع البيانات الخاصة بالمتغيرات الثلاثة الباقية على جزء ثانٍ يُرقم
من 10 إلى 100 . ويوضح الشكل (٧-٧) هذا الرسم البياني .

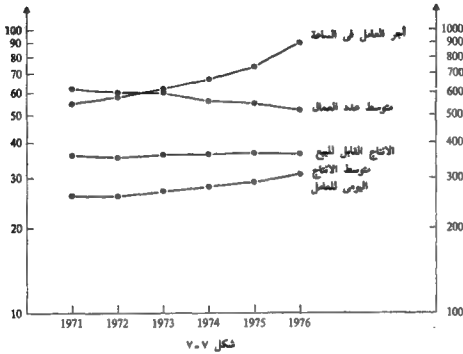
وتحتل المسافات الرأسية المتساوية على الرسم البياني نصف اللوغاريتمى تغيرات نسبية متساوية . وهكذا فإن أجزاء الرسم البياني ذات الميل المتساوى تمثل تغيرات نسبية متساوية فى قيم المتغيرات المعنية .



شكل ٦-٧

ونلاحظ فى المثال أن الجزء من الرسم البياني الخاص بأجر العامل فى الساعة عن الفترة من ١٩٧٢ - ١٩٧٣ (ويمثل ارتفاعا من 58 الى 62) له نفس الميل مثل الجزء من الرسم البياني الخاص بانتاج العامل عن الفترة من ١٩٧٥ - ١٩٧٦ (ويمثل ارتفاعا من 29 الى 31) .

ولما كانت التغيرات النسبية هى التى تهتمنا ، فإن السلاسل الزمنية المقاسة بوحدات مختلفة يمكن أن تقارن ببعضها على نفس الرسم البياني نصف اللوغاريتمى . وقد استخدمنا ذلك فى المثال المعطى حيث كان الانتاج مقاسا بالآلاف الوحدات فى حين كانت الأجر مقاسة بالبنسب فى الساعة .



شكل ٧-٧

والرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية مفيدة بصفة خاصة عندما يغطي أحد المتغيرات مدى واسعا للتغير . وفي مثل هذه الحالة ، فإن استخدام رسم بياني عادي يتطلب استخدام مقياس رسم مصغر على المحور الرأسى بدرجة لا تظهر معها الاختلافات النسبية المحسوسة فى المتغيرات الأخرى . ومن جهة أخرى ، فإن هناك عيبا فى الرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية ، وهو استحالة تمثيل القيم السالبة ، أو الصفرية للمتغيرات عليها .

والنتائج التى يمكن التوصل إليها من الشكلين (٦-٧) و (٦-٧) بشأن المثال المذكور هى أن الانتاج ظل ثابتا نسبيا فى حين زادت الأجور فى الساعة بمعدل كبير . أما انتاج العامل ، وعدد العمال فقد زاد أولها ونقص الثانى بمعدلات مقاربة الى حد كبير . وهذه الحقيقة الأخيرة لم تكن لتظهر بوضوح على رسم بياني عادي لأن أعداد العمال نحو ضعف الأعداد الدالة على انتاج العمال .

تعرين ٧-٣-٢ وقع البيانات التالية على رسم بياني -

(أ) عادى

(ب) نصف لوغاريتمى

الفترة	1	2	3	4	5	6	7	8
الرقم	200	320	640	1 180	2 080	4 050	6 480	9 030

اذكر مزاياء وهيوبوب استخدام الرسم البياني نصف اللوغاريتمى فى هذه الحالة .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٤)

ملاحظات المستطيلات يندرج تحت هذا العنوان العام عدد من الرسومات البيانية المختلفة والصفة المشتركة بينها هى أن بها خطوط أو « مستطيلات » يمثل طولها التكرار ، أو أية « قيمة » أخرى لإحدى الخواص ، وتستخدم الأعمدة البيانية عادة

عندما تكون الصفات المعتبرة ذات طابع كيفي . أما بالنسبة للبيانات المقسمة إلى مراحل كمية ، فإن المدرج التكرارى يكون أنسب .

وسندرس كمثال لأبسط أنواع خرائط المستطيلات البيانات التالية بشأن استخدام إحدى الشركات للقيمة المضاعفة فى أحد الأعوام . والأعداد المعطاه بملايين الجنيهات .

اجمالى القيمة المضاعفة	175.2
استخدامات القيمة المضاعفة	
ما يدفع للمستثمرين	26.9
ما يدفع كضرائب على الأرباح	13.1
ما يدفع للمعلنين بالشركة	97.8
ما يخصص كاستثمارات للمنتج	37.4
الجملة	175.2

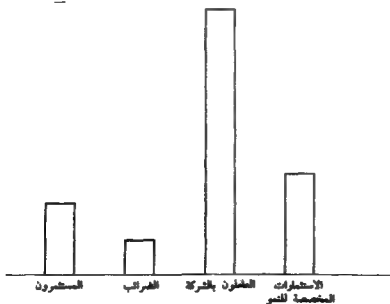
(البيانات مأخوذة من م م أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٩)

ويوضح الشكل (٧-٨) خريطة مستطيلات بسيطة تمثل هذه البيانات . ويمكن كذلك رسم الأعمدة أفقية كما فى شكل (٧-٩)

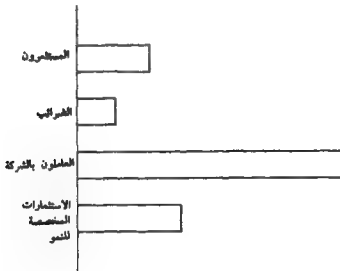
ويعطى كل من هذين الشكلين انطباعا بصريا جيدا عن الأهمية النسبية لكل من الاستخدامات المختلفة للقيمة المضاعفة .

وهناك طريقة أخرى وهى استخدام مستطيل واحد رأسى ، أو أفقى مقسم الى أقسام يمثل طول كل منها قيمة الصفات المعتبرة . ويبين شكل (٧-١٠) النوع الأفقى من هذه الأعمدة . ويسمى هذا النوع من الأعمدة البيانية خريطة مستطيلات مفردة .

وعموما فإن هذا النوع لا يمثل جيدا المجموعة الواحدة من البيانات كما تمثلها الأعمدة البيانية المنفصلة . ولكنه يكون مفيدا عند مقارنة مجموعات مختلفة من البيانات ، كما سنرى فيما بعد . ومن المفيد لأغراض المقارنة استخدام



شكل ٧-٨



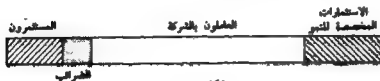
شكل ٩-٧

النسب المثوية للتكرار ، أو النسب المثوية للقيم الممطاه بدلا من القيم ذاتها . ويكون هذا أفضل بصفة خاصة عندما يكون التكرار الكلي ، أو مجموع القيم مختلفا في المجموعات المختلفة . أما بالنسبة لمجموعة واحدة من البيانات ، فإن استخدام النسب المثوية لا يغير شيئا في الأعمدة البيانية لأن ، التكرارات أو القيم تظل بنفس نسبتها الى بعضها . ولكي نرى كيفية استخدام خرائط المستطيلات لمقارنة مجموعات من البيانات لنفرض أنه كان لدينا بالإضافة الى البيانات الممطاه في المثال أعلاه مجموعة أخرى من البيانات خاصة بالعام السابق . وعندئذ ستكون المجموعة الكاملة من البيانات كما يلي :

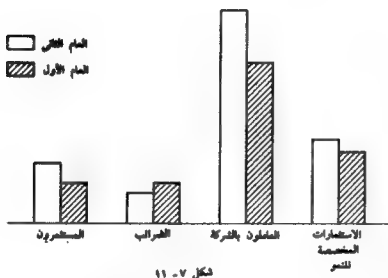
	العام الثاني	العام الأول
اجمالي القيمة الممطاه	175.2	139.9
استثمارات القيمة الممطاه :		
ما يدفع للمستثمرين	26.9	17.5
ما يدفع كشرائب على الأرباح	13.1	16.9
ما يدفع للمملون بالثركة	97.8	73.6
ما يخصص كاستثمارات للنمو	37.4	31.9
	175.2	139.9

(البيانات مأخوذة من ممتأ - الأسس ب - مايو ١٩٧٩)

فلذا كنا نستخدم خرائط المستطيلات المنفصلة ، فانه يمكن عمل رسمين بيانيين منفصلين . ولكن مثل هذه الرسوم البيانية لا تسهل مقارنتها . لذلك يفضل عمل رسم بياني موحد تكون قيمة الأعمدة الرأسية ، أو الأفقية مرسومة أزواجا متجاورة بحيث يمثل كل زوج نفس الخاصية في مجموعتي البيانات .



شكل ١٠-٧



شكل ١١ - ٧

ويبين شكل (١١-٧) النوع الرأسى من هذه الأعمدة ، وقد استغلنا فيه القيم الخام الواردة بالمثال . ويسمى هذا الرسم البياني « خريطة مستطيلات مركبة »

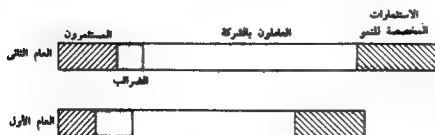
ويمكن كذلك أن نرسم عمودين ذوى مركبات لكل من المستين جنباً إلى جنب . ويبين الشكل (١٢-٧) الحالة الأفقية لهذين العمودين .

وفى الحالتين المذكورتين فإن الاختلاف فى اجمالى القيم يعوق المقارنة . وفى الحالة الثانية ، فإن اختلاف الأطوال الكلية للمستطيلين يجعل من الصعوبة بمكان مقارنة أطوال الأجزاء ، أو « المركبات » . ولذلك فمن المفيد لتسهيل المقارنة استخدام النسب المئوية .

وتحويل القيم الواردة بالمثال إلى نسب مئوية نحصل على :

	العام الثاني	العام الأول
اجمالى القيمة المضافة	100%	100%
استخدامات القيمة المضافة		
ما يذهب للمستثمرين	15.4	12.5
ما يذهب كعرباب على الأرباح	7.5	12.1
ما يذهب للمعاملين بالفرقة	55.8	52.6
ما يتخصص كاستثمارات للنمو	21.3	22.8
	100	100

ويبين شكل (١٣-٧) رسماً بيانياً يستخدم أزواجاً منفصلة من الأعمدة الرأسية .



شكل ١٣ - ٧



ونلاحظ أن الجزء الممثل للاستثمارات المخصصة للنمو في العام الأول أصبح الآن أطول في حين أنه عند استخدام القيم الخام كان هذا الجزء أطول في العام الثاني .

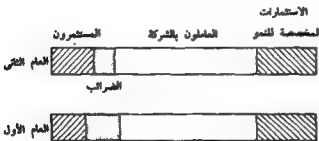
وبين شكل (٧-١٤) مستطيلات بيانية ذات مركبات تمثل النسب المئوية للعامين . وهذا النوع من المستطيلات البيانية المنفردة من خرائط المستطيلات هو أفضلها . فكون المستطيلات لها نفس الطول الكلي يجعل مقارنة الأجزاء المتناظرة أسهل .

تعيين ٣-٣-٧ الأرقام التالية الواردة في بريطانيا بملايين الجنيهات ومصادرها في عامي 1964 و 1968 .

المصدر	أمريكا الشمالية	منطقة الأستراي	أوروبا الغربية	بقية العالم
1964	1 109	1 874	1 813	899
1968	1 576	2 744	2 899	1 181

ارسم خرائط أعمدة مناسبة لمقارنة أرقام الواردات في هذين العامين .

الرسوم البيانية الدائرية في الرسوم البيانية الدائرية ترسم دائره ، وتقسم إلى قطاعات بحيث تمثل مساحة كل قطاع التكرار ، أو أية قيمة أخرى نهجتا . وعمليا فإن الرسوم البيانية الدائرية تكون منشأة دائما على أساس التكرارات النسبية وطريقة انشاء هذه الرسوم هي أولا بحساب النسب المئوية للتكرار ثم بتقسيم الزاوية 360° الواقعة عند مركز الدائرة إلى هذه الأجزاء النسبية باستخدام منقلة . وفي النهاية تقسم الدائرة إلى قطاعات برسم مستقيمات تخرج من المركز كاشعة عند الزوايا المطلوبة . وعندئذ ستكون مساحات القطاعات الناتجة ممثلة للتكرارات أو القيم الأخرى المعنية .



شكل ٧-١٤

يتضمن التقرير السنوى لاحدى الشركات عن علم معين البيانات التالية :

النشاط	%
تكرير السكر	26
تداول السلع والتخزين والتوزيع	37
انتاج السكر الخام	4
التشا	8
مواد البناء والادارات الهندسية	16
والأنشطة المتنوعة	16
الطفل	9

(ممتد أ- الأساسى ب- مايو ١٩٧٩)

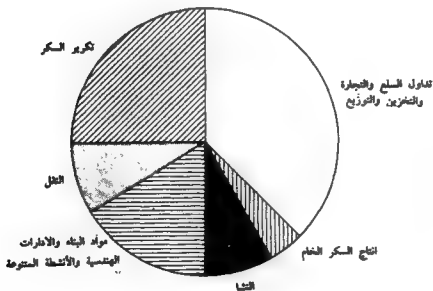
وسنوضح هذه البيانات برسم بياني دائرى .

والخطوة الأولى هى تقسيم 360 إلى النسب المئوية المطلوبة . وسنجد أن 26% من 360° يساوى 93.6° ، وأن 37% من 360° يساوى 133.2° وهكذا . وفيما يلى المجموعة الكاملة من البيانات :

النسبة المئوية	26	37	4	8	16	9
الزاوية بالدرجات	93.6	133.2	14.4	28.8	57.6	32.4

وبالتالى يكون الرسم البياني الدائرى كما هو موضح بشكل (٧-١٥) .

والرسومات البيانية الدائرية شائعة الاستخدام ، وهى تعطى صورة مفيدة عن قيم النسب المئوية ، وخاصة عند مقارنة مجموعات مختلفة من البيانات . ولكن رسمها أصعب قليلا من رسم الأعمدة البيانية حيث أنها تحتاج الى برجل ومنقلة .



تمرين ٧-٣-٤ تبين الأرقام التالية توزيع صادرات بريطانيا بملايين الجنيهات في عامي ١٩٦٤ و ١٩٦٨ .

الصادرات	أمريكا الشمالية	منطقة الاسترني	أوروبا الغربية	بقية العالم
١٩٦٤	594	1 529	1 655	622
١٩٦٨	1 139	1 756	2 264	1 018

ارسم رسماً بيانياً دائرياً لمقارنة توزيع الصادرات على الجهات الأربع في العامين .

الرسومات المصورة هذه الرسومات نوع من التمثيل البياني تستخدم فيه صور مكررة لتمثيل التكرار ، أو أية قيمة أخرى .
للخاصية المبحوثة . وعلى سبيل المثال سنأخذ البيانات التالية عن عدد الماطلين (بالآلاف) في منطقة أنجليا الشرقية
كم توسط شهري للأعوام ١٩٧٢ و ١٩٧٤ و ١٩٧٥ .

السنة	١٩٧٢	١٩٧٣	١٩٧٤	١٩٧٥
عدد الماطلين (بالآلاف)	18.5	12.4	12.9	23.8

ويمكن تمثيل هذه المجموعة من البيانات برسم مصور كالرسم الموضح بشكل (٧-١٦)

وهذه الطريقة شائعة الاستخدام ، وتعطى انطباعاً بصرياً جيداً عن مجموعة البيانات المبحوثة ، ولكنها ليست دقيقة .
ويفضل عدم استخدامها إلا كطريقة تقريبية لمرض البيانات بصفة عامة .

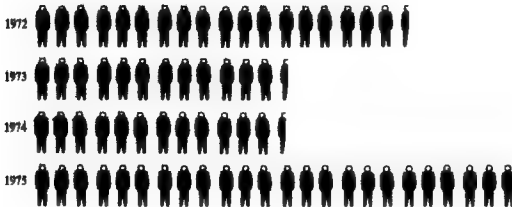
تمرين ٧-٣-٥ الجدول التالي مأخوذ من بيانات الملخص السنوي للإحصائيات .

السنة	توريدات التراجيك (بالآلاف)
١٩٥١	4 033
١٩٥٢	3 624
١٩٥٣	2 994
١٩٥٤	3 297
١٩٥٥	3 562
١٩٥٦	2 873
١٩٥٧	2 548
١٩٥٨	2 156
١٩٥٩	2 213
١٩٦٠	2 278

المصدر : الفرقة التجارية .

مثل الخواص البارزة لهذا الجدول بواسطة رسم مصور . ماهي مزايا وعيوب هذا النوع من التمثيل ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٦٤)



شكل ١٦-٧

تعدادين

١٦-٧ (أ) اوسم البيانات التالية مضاعفا للتكرار المتجمع (أوجيف) ، ومدرجا تكراريا ومضاعفا تكراريا .

عدد الموظفين بالآلاف		عدد الموظفين
مجموع الأجر	£	
22	18	30
26	22	45
30	26	180
34	30	160
38	34	170
42	38	120
46	42	50
50	46	20

(ب) عاهو الغرض من الأوجيف

(م م ت ١ - ادمس ب - مايو ١٩٧٥)

٧-٧ ألقى رسميا بيانات نصف لوجاريتمي للبيانات التالية

العام	في بريطانيا العظمى			
	مجموع الأرباح على الفرق (مليون £)	مجموع عدد السيارات المرخصة (بالآلاف)	مجموع سيارات النقل المرخصة (بالآلاف)	مجموع حوادث الطرق (بالآلاف)
1959	228.0	4 972	1 378	333
1960	238.0	5 532	1 448	348
1961	270.7	5 983	1 503	360
1962	301.2	6 560	1 522	342
1963	342.4	7 380	1 582	356
1964	405.8	8 252	1 633	385
1965	421.2	8 922	1 661	397
1966	437.4	9 522	1 639	392
1967	528.2	10 312	1 692	370
1968	580.9	10 825	1 640	349

(المصدر : الطقس السرى للاقتصاد)

فسر الرسومات البيانية التي رسمتها وأذكر مزايا هذا النوع من التمثيل البياني إن وجدت .
(ممت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

٧-٣ الأرقام التالية مأخوذة من الملخص السنوي للإحصاء لعام ١٩٧٦ (جدول ٣٦٦) وهي متعلقة بتوزيع ثروة الأفراد المعروفة في بريطانيا العظمى

مدى الثروة		1967		1974	
أكبر من (£)	لا يزيد عن (£)	عدد الحالات (بالآلاف)	القف مليون (£)	عدد الحالات (بالآلاف)	القف مليون (£)
-	1 000	5 398	2.8	3 410	2.0
1 000	3 000	5 273	9.8	4 775	8.6
3 000	5 000	2 966	11.6	2 223	8.7
5 000	10 000	2 177	15.3	4 131	30.3
10 000	15 000	620	7.6	2 166	26.5
15 000	20 000	270	4.8	757	13.3
20 000	25 000	157	3.4	415	9.6
25 000	50 000	279	9.9	640	21.7
50 000	100 000	109	7.5	229	15.4
100 000	200 000	37	5.1	65	9.2
200 000		14	5.8	26	11.8
Total		17 300	83.6	18 837	157.1

مثل هذه البيانات على شكل منحني لورنز وعلق على النتيجة .

(ممت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٩)

٧-٤ أظهرت حسابات بنك ثلاثة أحوام توزيع الأرباح كما يلي :

	1978	1977	1976
	£m	£m	£m
الربح مثل الفرائب	373	295	198
الفرائب	135	140	82
فوائد الأمانة	12	12	11
أرباح الأسهم	30	23	11
الربح المتبقي	196	120	114

والمطلوب تمثيل البيانات المعطاة بإحدى طرق التمثيل البياني .

(ممت أ - الأساس ب - مايو ١٩٨٠)

الفصل الثامن

ملخص احصائي

٨-١ تمهيد

في محاولة لتمثيل مجموعة البيانات بطريقة مناسبة وسهلة وجد أن من أحسن الوسائل ترتيب البيانات وتمثيلها في جداول تكرارية ، أو عن طرق التمثيل البياني .

نوجه اهتمامنا الآن نحو استخراج رقم ، أو اثنين من مجموعة البيانات للاستدلال على ملخص لحقائق الظاهرة التي تمثلها مجموعة البيانات ككل .

أولاً : سوف نبحث عن عدد وحيد يمثل مركز هذه البيانات ، وسوف نشير لهذا العدد بأنه مقياس النزعة المركزية ، أو بصورة أعم بأنه « المتوسط » (يفضل عدم استخدام هذا اللفظ في المجال الاحصائي) .

ثانياً : سوف نجد عدداً يدل على مدى التشتت بين مفردات القيم . مثل هذا العدد يعرف بمقياس التشتت . والانحراف المعياري هو الأكثر استعمالاً بين هذه المقاييس .

ثالثاً : سوف نبحث عن عدد يدل على شكل التوزيع ، أي بمعنى أدق هل مفردات البيانات متماثلة في توزيعها ، أو معظم البيانات قيم صغيرة نسبياً (التوزيع مفرطح يميناً) أو معظم البيانات قيم كبيرة نسبياً (التوزيع مفرطح يساراً) . ويعرف هذا العدد بمقياس الالتواء .

ويوجد ثلاثة مقاييس أساسية للنزعة المركزية تعرف بالوسط الحسابي ، الوسيط والمتوال . وسوف ندرس كلا من هذه المصطلحات : أولاً بالنسبة لمجموعة الأعداد بيانات غير مبوبة ، ثم بالنسبة للبيانات في الجدول التكراري (بيانات مبوبة) .

٨-٢ الوسط الحسابي

وأشهر مقاييس النزعة المركزية هو « الوسط الحسابي » . والوسط الحسابي يختلف عن ما يسمى بالوسط الهندسي ، أو ما يسمى بالوسط التوافقي .

(١) بيانات غير مبوبة

لايجاد الوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد نجمع تلك الأعداد ونقسم الناتج على عددها وعلى سبيل المثال : الوسط

الحسابي للأرقام 4,7,8,2,4 و 5 هو

$$\frac{4+2+8+7+4+5}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

اعتبر أن الأرقام هي 60,50,40,80,50. إذن وسطهما الحسابي هو 56.

$$\frac{50+80+40+50+60}{5} = \frac{280}{5} = 56$$

ولكى نحصل على أساس للمعنى السابق ، فسوف يفسر على النحو التالي :

أى مثلاً : أثن يمتلك 50p بريان يمتلك 80p كولين يمتلك 40p دافيد يمتلك 50p أدى يمتلك 60p . فكم يحصل كل منهم إذا وضعوا كلهم نقودهم فى صندوق واحد ووزعت بينهم بالتساوى ؟

الكمية التى فى الصندوق تساوى $50p + 80p + 40p + 50p + 60p = 280p$ ويوجد 5 من الأشخاص يشتركون فى هذه النقود . فنصيب كل منهم يساوى $280 / 5 = 56p$

وإذا تعرضت من حين لآخر لكلمة « متوسط » فى أى تطبيق ، أو من الأنباء المذاعة فإنها غالباً تعنى بها الوسط .

وقبل أن نترك الوسط الحسابي للبيانات ، فمن الضروري أن نعرف الملخص للطريقة الرياضية لحسابه . وتمطى

بما يلى :

١ - أجمع كل قيم المفردات معا .

٢ - اقسم على عدد المفردات .

وفى المثال السابق عندنا 5 أرقام 60,50,40,80,50. بصورة عامة نفرض لدينا n من الأرقام $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ والرمز الرياضى المختصر لمجموع قيم x معا هو $\sum x$ (تقرأ سيجما x) . وعلى سبيل المثال :

$$y_1 = 1, y_2 = 3, y_3 = 7, y_4 = 4, y_5 = 1, y_6 = 8$$

$$\sum y = 1 + 3 + 7 + 4 + 1 + 8 = 24$$

وبعد جمع قيم x كلها معا لابد أن نقسم المجموع على عدد المفردات لكي نحصل على الوسط الحسابي لقيم x .

الرمز \bar{x} (يقرأ بار x) يستعمل للصورة العامة لتمثيل الوسط الحسابي . فالطريقة الرياضية المختصرة لتعريف

الوسط الحسابي للبيانات غير المبوية هي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

(ب) بيانات مبوية

ولايجاد الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات المبوية فى جدول تكرارى ، نجد تقريباً لجميع المفردات فى المجموعة ويعرف بمركز الفئة ، ثم نجد الوسط الحسابي لهذه المراكز كبيانات غير مبوية .

ونفرض الجدول التكرارى التالى لتوزيع اوزان 150 مسمار قلاووظ .

الوزن (بالأونصة)	
4	5.08
18	5.01
25	5.02
36	5.03
30	5.04
22	5.05
11	5.06
3	5.07
1	5.08

(المعلومات من ج م م - أسس ب - يونيو ١٩٧٨)

ولابجاء الوسط الحسابى لكل مفردات الفئة الأولى ، فهو يُقرب الى 5.005 ولتلك التى فى الفئة الثانية فيقرب الى 5.015 وهكذا .

إذا الوسط الحسابى يوجد عن طريق جمع 5.005 أربع مرات و 5.015 ثمانى عشرة مرة و 5.025 خمسة وعشرين مرة وهكذا ، ثم نقسم المجموع على العدد الكلى للمفردات المعطى ، والذي هو :

$$150 = 4 + 18 + 25 + 36 + 30 + 22 + 11 + 3 + 1$$

أى أن الوسط يساوى

$$\frac{4 \times 5.005 + 18 \times 5.015 + 25 \times 5.025 + 36 \times 5.035 + 30 \times 5.045 + 22 \times 5.055 + 11 \times 5.065 + 3 \times 5.075 + 1 \times 5.085}{4 + 18 + 25 + 36 + 30 + 22 + 11 + 3 + 1}$$

أونصة 5.038

١

وبصورة أهم ، فإذا رمزنا لمراكز الفئات فى جدول تكرارى بالرمز x وتكراراتها بالرمز f بهذا يمكن حساب الوسط الحسابى بالمعادلة التالية

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

عمليا فليس من المعتاد استخدام هذه المعادلة بهذا الشكل بالضبط فى حساب الوسط الحسابى لبيانات مبنية . بل تنجرى بعض المعالجات الأولية لهذه البيانات تعرف باسم التعديل لتبسيط الحسابات . (هذه الفكرة للتعديل فى النظام تصبح أكثر أهمية من الحالة الأخيرة وذلك عندما ندرس الانحراف المتوسط ، والانحراف المعياري) ، صورة التعديل الأكثر شيوعا تتم على مرحلتين :

١ - بطرح من كل مركز فئة قيمة مناسبة ، ولتكن h مثلا . هذه القيمة تعرف فى بعض الأحيان بالوسط الافتراضى . وإذا كانت h مختارة بدقة ، فالوسط الحسابى الحقيقى سوف لا يختلف عنها كثيراً .

٢ - وبعد الحصول على القيم $h - x$ نقسم هذه القيم على الطول العام c لفئة والناتج يعطى مركز الفئة المعدل :

$$d = \frac{x - a}{c}$$

وبعد تعديل البيانات نحسب الوسط الحسابي للقيم المعدلة d على النحو التالي

$$\bar{d} = \frac{\sum fd}{\sum f}$$

وهذه أسهل من حسابها عن حساب x مباشرة ، وأخيرا نستخدم العلاقة التالية

$$\bar{x} = c \cdot \bar{d} + a$$

لتوضيح هذه الطريقة نرجع للمثال السابق للبيانات المبوية عن 150 مسمار قلاووظ . المأخوذة من ح م م الأساس ب : يونيو ١٩٧٨ .

الوزن (بالأوقية)	التكرار f	مركز الفئة x	$x - 5.045$	$d = \frac{x - 5.045}{0.01}$	fd
5.00 وأقل من 5.01	4	5.005	-0.04	-4	-16
5.01 وأقل من 5.02	18	5.015	-0.03	-3	-54
5.02 وأقل من 5.03	25	5.025	-0.02	-2	-50
5.03 وأقل من 5.04	36	5.035	-0.01	-1	-36
5.04 وأقل من 5.05	30	5.045	0.00	0	0
5.05 وأقل من 5.06	22	5.055	0.01	1	22
5.06 وأقل من 5.07	11	5.065	0.02	2	22
5.07 وأقل من 5.08	3	5.075	0.03	3	9
5.08 وأقل من 5.09	1	5.085	0.04	4	4
	$\sum f = 150$				$\sum fd = -99$

$$\bar{d} = \frac{\sum fd}{\sum f} = \frac{-99}{150} = -0.66$$

ونجد أن

$$\bar{x} = 0.01 \times (-0.66) + 5.045 = -0.0066 + 5.045 = 5.0384$$

أي أن متوسط وزن المسمار الواحد يساوي 5.038 من الأوقيات . وهذه هي نفس النتيجة السابقة .

وفي هذه المثال قد اخترنا الوسط الافتراضي a يساوي 5.045 من الأوقيات . بطرح هذا من مراكز الفئات نحصل على أعداد في المدى من -0.04 إلى +0.04 بدلا من المدى 5.005 إلى 5.085

ثم بعد هذا نقسم على طول الفئة 0.01 لكي نحصل على فئة قيم d المتراوحة من 4 إلى +4 .

وحساب d كان سهلا جدا ، ثم في النهاية نستطيع أن نحصل على x .

تمرين ٨-٢-١ قرن يسع حجمه بالتقريب 200 طن ، يستخدم لصب سبائك من الصلب تزن كل سبيكة 10 من الأطنان . كمية الصلب في الفرن لا يمكن حصرها بدقة ، ولذلك فإن سبيكة غير كاملة تتج عند صب السبائك . وعلى

سبيل المثال : إذا كان وزن الصلب المنصهر في الفرن 198 طناً ، فسوف تنتج 19 سبيكة كاملة وواحدة غير كاملة تزن 8 أطنان فقط . والجدول التالي يوضح توزيع أحمال 100 فرن خلال صب السبائك من الفرن .

الفرن	وزن الصلب في الفرن (بالأطنان)
1	190.0 وأقل من 192.5
4	192.5 وأقل من 195.0
8	195.0 وأقل من 197.5
19	197.5 وأقل من 200.0
36	200.0 وأقل من 202.5
20	202.5 وأقل من 205.0
8	205.0 وأقل من 207.5
4	207.5 وأقل من 210.0

المطلوب :

نسق التوزيع التكرارى السابق لأوزان السبائك غير الكاملة ، واحسب الوسط الحسابى .

(جـ م أ - الأساس ب : يونيو ١٩٧٥)

تمرين ٨ - ٢ : شركة طيران مطالبة بتقدير زمن الدوران اللازم لنقل بعض الواردات والصادرات لمواد قابلة للكسر .

وقد أمد مدير التعاقدات إدارة المحاسبة بالتحليل التالى لأزمة الدورات اللازمة لنقل مثل هذه البضائع خلال فترة زمنية طولها اثنا عشر شهراً .

الفترة بالساعات	التكرار
2 أقل من 4	25
4 وأقل من 6	36
6 وأقل من 8	66
8 وأقل من 10	47
10 وأقل من 12	26
12 وأقل من 14	18
14 وأقل من 16	2

والمطلوب هو إيجاد الوسط من التوزيع المعطى السابق .

(جـ م أ - الأساس ب : مايو ١٩٧٩)

٨ - ٣ الوسيط

(أ) بيانات غير مبوبة

لايجاد الوسيط لفئة من الأرقام ترتب هذه الأعداد ترتيباً تصاعدياً ونختار العدد الذى فى الوسط . فيكون الوسيط لهذه المجموعة هو قيمة العدد الذى يقع فى الوسط .

مثلاً 4 ، 9 ، 1 ، 6 ، 7 لها وسيط 6 .

وهذه الأعداد بعد ترتيبها تصاعدياً تصبح 1 ، 4 ، 6 ، 7 ، 9 والعدد 6 هو الذى يقع فى الوسط .

مثلا 1 ، 3 ، 4 ، 7 ، 7 ، 8 ، 8 ، 10 ، 11 لها وسيط 7 .

وهذه الأعداد من البداية مرتبة تصاعدياً ، وقيمة الرقم الذى فى الوسط هو 7 . ولا يهم إذا كان الرقم 7 مكرراً فى الفتة .

فى المثالين السابقين قد أخذنا فى الاعتبار أعدادا فردية من المفردات . أما إذا كان عدد المفردات زوجيا ، فالترتيب المعطى سابقا لابد أن يعدل قليلا . فى هذه الحالة سوف نرتب القيم ترتيبا تصاعديا ، ونختار العددين اللذين فى المنتصف ، والوسيط يكون الوسط الحسابى لهذين العددين .

فمثلا 2 ، 5 ، 7 ، 9 ، 12 ، 14 لها الوسيط 8 .

وفى ذلك عند ترتيبها تكون 2 5 7 9 12 14 والقيمتان اللتان فى المنتصف هما 7 و 9 وهذان العددان متوسطهما 8 .

ومثلا 3 ، 4 ، 7 ، 7 ، 8 ، 10 ، 11 ، 12 لها الوسيط $7\frac{1}{2}$.

وحيث أن هذه الأعداد من الأصل مرتبة ترتيبا تصاعديا ، والقيمتان اللتان . فى المنتصف هما 7 و 8 وهذان العددان متوسطهما يساوى $7\frac{1}{2}$.

فى الأمثلة السابقة التى درست حتى الآن كان عدد المفردات صغيرا حتى نستطيع أن نرتبهم على ورقة ، أو بمجرد الملاحظة .

اعتبر الآن لدينا عددا كبيرا من المفردات ، ونريد أن نجد الوسيط لها ، فمثلا ،

83	80	91	81	88	82	87	97	83	99
78	85	72	92	84	90	87	78	93	98
86	80	93	86	88	83	82	101	89	82
85	95	80	89	84	92	76	81	105	94

أولا : أشطب أكبر عدد من هذه المجموعة (أى 103)

ثم أشطب أصغر رقم من هذه المجموعة (أى 72) .

وبعد ذلك أشطب العدد الثانى فى الكبير (أى 101) .

ثم أشطب العدد الثانى فى الصغر (أى 75) ، وهكذا .

استمر بهذه الطريقة ، وأشطب على التوالى القيم الكبرى والصغرى من الأرقام الباقية كل مرة ، وهكذا حتى يبقى

عدد واحد فقط (أو عددين إذا كان العدد الكلى للمفردات زوجيا) . وهذا يعطى الوسيط .

وبالنسبة للمثال السابق ، فالعددين المتبقيان بعد إجراء هذه العملية هما 86 فهذا يعنى أن الوسيط للفتة السابقة

المكونة من 40 عددا هو

$$\frac{86 + 86}{2} = 86$$

والوسيط لمجموعة من الأعداد يمثل علامة بالرمز x (وتقرأ x تيلدا) .

(ب) بيانات صوية

كما هو فى حالة البيانات غير الصوية فإن الوسيط هو القيمة التى فى المنتصف . أى أنه هو القيمة التى أقل منها نصف المفردات ، وأكبر منها نصف المفردات الأخرى .

ومعنى هذا لايجاد الوسيط لمجموعة من البيانات المبوية لابد أن نستعمل الجدول التكرارى المتجميع ، أو المصنوع التكرارى المتجميع المناظر . وأولا سوف نحصل على الوسيط من المصنوع التكرارى المتجميع فلاحظ كيف أن هذه الطريقة هي امتداد لحساب الوسيط من الجدول التكرارى المتجميع . وسوف نعتبر المثال التالى :

شركة دولية تفحص الطلبات الواردة من المنافذ التجارية الأوربية التابعة لها ، وقد صفت المعلومات على الوجه التالى :

تصنيف الطلبات الواردة يوليو ١٩٧٧

عدد الطلبات في الشهر £000s	عدد المنافذ التجارية
180 و > 220	10
220 و > 260	30
260 و > 300	20
300 و > 340	50
340 و > 380	40
380 و > 420	30
420 و > 460	20

(البيانات من م م م أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

وإدارة الشركة ترغب في تعيين الوسيط الشهري لثمن الطلبات ، وذلك للشراء ، وتثبيت الخصومات للمنافذ التجارية .

الخطوة الأولى هي : تكوين الجدول التكرارى المتجميع .

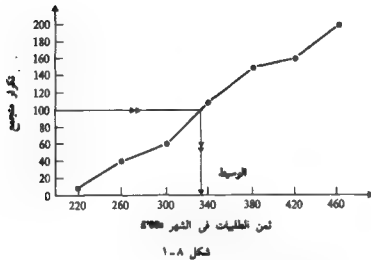
لثمن الطلبات في الشهر £000s	عدد المنافذ التجارية
أقل من 220	10
أقل من 260	40
أقل من 300	60
أقل من 340	110
أقل من 380	150
أقل من 420	180
أقل من 460	200

ويمكننا من هذا الجدول رسم منحني تكرارى متجميع ، كما هو موضح في شكل ٨ - ١ .

التكرار الكلى يساوى 200 ولكى نحصل على الوسيط نقسم هذا المقدار على 2 فنحصل فى هذه الحالة على 100 . ومن ثم نرسم خطا مستقيما عند القيمة 100 من محور التكرار المتجميع الى المصنوع التكرارى المتجميع . وبإسقاط مستقيم من المصنوع التكرارى المتجميع الى المحور الأفقى فنحصل على الوسيط .

والرسم البينى يوضح هذه الطريقة للحصول على الوسيط ، ولكن إذا استخدمت هذه الطريقة فى التطبيق العملى ، فستطلب رسم المصنوع التكرارى المتجميع على مقاييس كبير من ورق الرسم البينى للحصول على الدقة المطلوبة .

وسوف ندرس الرسم البياني السابق مرة ثانية . وذلك لكي نرى كيفية استنتاج صورة لحساب الوسيط . وحيث أن نصف التكرار 100 يقع بين التكرارين 60 و 110 في الجدول التجميعي ، الوسيط لابد أن يقع بين الحدود الحقيقية للفتة (300 و 340) التي تناظر التكرارات التجميعية للآخرين . الفتة من "300 وأقل من 340" تسمى فتة الوسيط . وإذا كان نصف التكرار قريبا من 60 فكان لابد أن نتوقع أن الوسيط أقرب إلى 300 بينما إذا كان نصف التكرار أقرب فعليا إلى 110 منها إلى 60 فكان لابد أن نتوقع أن الوسيط قريب من 340 أى أنه قد كونا فكرة أن المسافة التي نحتاج أن نتحركها إلى نصف التكرار لكي نصل إلى الوسيط تتناسب مع مقدار بعدها عن تكرار الحد الحقيقي الأدنى لفتة الوسيط .



وفي هذه الحالة نجد أن

$$\bar{x} = 300 + \frac{100 - 60}{110 - 60} \times 40 = 300 + \frac{40}{50} \times 40$$

أى أن

$$\bar{x} = 300 + 32 = 332$$

وعلى هذا الوسيط لمقدار الطلبة الشهرية هو £ 332 000 .

اعتبر بصورة أهم أن المقادير التالية حقيقية :

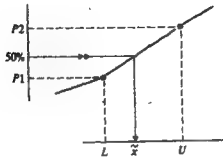
أكبر تكرار في الجدول التكرارى المتجمع والذي أقل من قيمة 50% هو P_1 .

التكرار التالى في الجدول التكرارى المتجمع هو P_2 .

حد الفتة الحقيقي المناظر لـ P_1 هو L .

حد الفتة الحقيقي المناظر لـ P_2 هو U .

هذه الحالة موضحة بالشكل ٢- أ



شكل ٨-٢

ثم بنفس التحليل المستخدم في المثال السابق نستطيع أن نحصل على الصورة العامة التالية للوسيط

$$\bar{x} = L + \frac{(50\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$$

نصين ٨-٣-١ فيما يلي توزيع للدخول عمال ذوى كفاية متوسطة لمدة أسبوع في 1977 :

الدخول الأسبوعية £	عدد العمال
30 > و 30	5
40 > و 30	26
50 > و 40	41
60 > و 50	58
70 > و 60	48
80 > و 70	18
90 > و 80	4

أوجد الوسيط للدخل الأسبوعي :

- (١) بالرسم مستعملا المضلع التكرارى ،
(٢) بالحساب .

(م م ت أ - الأساس ب : نوفمبر ١٩٧٧)

٨-٤ المتوال

(أ) بيانات غير موزنة

المتوال لغة من الأعداد هو العدد الذى يتكرر فى الفئة أكثر من أى عدد آخر .

نفرض أن دابن له طفلان ، هيلارى له 3 جانييس له 4 براند له 2 وليندا لها واحد . العدد الأكثر حدوثا هو 2 . وهذا يعنى أن 2 هو العدد المتوالى للأطفال .

مثال ما هو متوال الأعداد 5 ، 9 ، 7 ، 14 ، 8 ، 7 ، 3 ؟

المتوال هو العدد 7 لأنه يحدث مرتين ، ولا يوجد أى عدد آخر يحدث أكثر من مرة .

(ب) بيانات مبوية

منوال فئة البيانات المبوية يمكن أن نحصل عليه بالرسم البياني ، أو بالحسابات . الخطوة الأولى في كلتا الحالتين هو إيجاد الفئة المتوالية .

وفي حالة البيانات حيث جميع الفئات لها نفس الطول ، فالفئة المتوالية هي الفئة ذات أكبر تكرار . اعتبر المثال التالي :

أثناء الجلسات المنعقدة بالفترة الزمنية 1977 — 1978 كليه بها 70 فصلا مختلفا منها 44 « علمي » بمتوسط 15.2 حجم الفصل 26 « أدبي » بمتوسط 19.2 حجم الفصل . التوزيعات التكرارية لحجم الفصل معطاه على النحو التالي :

حجم الفصل (عدد الطلبة)	عدد الفصول العلمية	عدد الفصول الأدبية
1- 6	4	0
7-12	15	3
13-18	11	10
19-24	8	8
25-30	5	4
31-36	1	1
	44	26

لا يوجد أى طالب ينتمى لأكثر من فصل .

(البيانات مأخوذة من ج م م - الأساس ب : يونيو - ١٩٨٠)

لاحظ أن في هذا الجدول الفئات ليست منتظمة بنفس الطريقة كما في المسألة السابقة . وفي هذه الحالة القيم : 1 ، 7 ، 13 ، 19 ، 25 ، 31 هي حدود دنيا للفئات والقيم 6 ، 12 ، 18 ، 24 ، 30 ، 36 هي حدود عليا للفئات . وللصفات المعطاه بهذه الطريقة فان مركز الفئة هو متوسط الحدود العليا ، والحدود الدنيا للفئات . وحدود الفئة الحقيقية هي القيم التي في المنتصف بين الحد الأعلى لفئة ما والحد الأدنى للفئة اللاحقة .

ولهذه الفئة من البيانات سوف نجد المنوال لحجم الفصل العلمي . الطريقة البيانية تتضمن رسم المدرج التكراري ، ونعمل التوصيلات الواضحة في شكل ٨-٣ على المستطيل المناظر للفئة المتوالية . (من تعريف الفئة المتوالية نرى أنها سوف تناظر دائما أطول مستطيل بالمدرج التكراري) .

ولذا كانت هذه الوسيلة تستعمل عمليا لإيجاد المنوال بالمدرج التكراري لا بد أن يرسم بدقة على ورق رسم بياني . وبالقسط مثل الوسيط فان التوصيلات يمكن أن يعبر عنها بمعادلة . واستخراج المعادلة معقد بعض الشيء ، ولذا سنكتفى بإعطاء الصيغة المطلوبة .

افرض أن :

L هو الحد الأدنى الحقيقي للفئة المتوالية ،

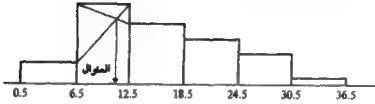
U هو الحد الأعلى الحقيقي للفئة المتوالية ،

f_m هو تكرار الفئة المتوالية ،

f_{m-1} هو تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية ،
 f_{m+1} هو تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية .

فالمنوال يعطى بالصورة التالية

$$\text{المنوال} = L + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \times (U - L)$$



شكل ٨-٣

للفصول العلمية نجد أن $f_{m-1} = 4$ ، $f_m = 15$ ، $f_{m+1} = 11$ ، $L = 6.5$ ، $U = 12.5$. فالمعادلة تدل على أن المنوال لحجم الفصل العلمى هو

$$6.5 + \frac{15 - 4}{(15 - 4) + (15 - 11)} \times (12.5 - 6.5)$$

$$= 6.5 + \frac{11}{11 + 4} \times 6 = 6.5 + \frac{66}{15} = 6.5 + 4.4 = 10.9$$

المنوال لحجم الفصل العلمى هو 10.9 طالب .

وفى هذه الحالة المنوال أكبر من مركز الفئة المنوالية لأن المستطيل الذى يقع على يمين مستطيل الفئة المنوالية أطول من الذى يقع على شماله ، فهذا يعنى أن المنوال سوف يكون أصغر من مركز الفئة المنوالية .

تمرين ٨-٤-١ فى المثال السابق أوجد المنوال لحجم الفصل الأدى :

١ - بيناها ،

٢ - باستخدام صورة المعادلة .

٨-٥ مقارنة المقاييس المركزية

الفائدة الأساسية للوسط الحسابى فى أنه يوجد له نظرية رياضية تقف خلفه ، والتي تجعله أكثر فائدة فى الاحمال الاحصائية عن الوسيط والمنوال . (سوف نوضح فائدة واستعمالات الوسط الحسابى فى الفصل الخامس عشر ، والسادس عشر) . أيضا كل مفردة فى فئة البيانات تستخدم فى إيجاد قيمة الوسط الحسابى .

ولبعض مجموعات البيانات فإن الوسط الحسابى هو قيمة ليست قريبة من وسط الجسم الأساسى للبيانات . فهو ليس مقياسا مقبولا للنزعة المركزية فى تلك الحالات . ويمكن أن يحدث هذا عند وجود بعض القيم القليلة بعيدة عن القيم الباقية . وجميع القيم تدخل فى حساب قيمة الوسط الحسابى والوسط الحسابى يمكن أن يجذب تجله تلك القيم القليلة .

إعتبر المجموعة التالية من قيم أجور أسبوعية بالجنهيات لسته من العمال فى قسم صيانة بشركة صغيرة :

60, 62, 64, 65, 69, 100

الوسط الحسابى هو 70 ولكن هذه القيمة ليست مقياسا مقنا للترعة المركزية . لأن خمسا من القيم أقل منها . والقيم المتطرفة تستعمل فى حالة البيانات الاقتصادية ، وفى هذه الحالة فإن الوسيط ، وليس الوسط الحسابى يكون مقياسا أكثر مناسبة .

الوسط لا يتأثر بتفاوت القيم للبيانات ، فقيمه تتحدد بمتصف المفردات فقط . وفائدة أخرى للوسط هى أنه لا يحتاج أى حسابات أكثر من متوسط عددين . والعيب فى استخدام الوسيط أنه لا يوجد نظرية رياضية صريحة تتعلق به ، وهذا يعنى أنه لا يمكن أن يستخدم فى معالجات أكثر صعوبة .

والمنوال يلجأ اليه بديها كقياس للترعة المركزية . والقيمة التى يأخذها تقع بالفعل فى الفئة ، وسوف يكون مقبولا ظاهريا بالنسبة لمركز البيانات . وبالإضافة إلى ذلك فإن المنوال لا يحتاج الى حسابات .

وفائدة أخرى للمنوال أنه يمكن أن يستعمل أيضا فى حالة البيانات غير العددية . ولقد درسنا مثلا سابقا لعدد أطفال : ديان ، هيلارى ، برندا ، ليندا ، جيليان ، وجانيس . وكان يمكن أن يخص المنوال صفات أخرى لهؤلاء الأشخاص مثل لون شعرهم . افترض أن - هيلارى ، برندا ، ليندا شعرهم أصفر وديان وجيليان شعرهما أسود ، أما جانيس فشعرها زنجبيلى اللون . ويمكن أن نقول : أن منوال لون الشعر هو الأصفر . والكلام عن متوسط لون الشعر ، أو وسط اللون لا معنى له .

ولكى نرى المشكلة الكبرى المتعلقة بالمنوال للبيانات المئوية ، اعتبر أن علينا أن نجد المنوال للأعداد

5, 8, 7, 14, 8, 7, 3

كل من العددين 7 و 8 يظهران كما لو كانا منوالا ، وذلك لأن كلا منهما يحدث مرتين ولا يحدث عدد آخر أكثر من مرة . ويمكن أن يعتبرا منوالين ، والبيانات فى هذه الحالة تسمى ثنائية المنوال .

وبصورة أعم يمكن أن يوجد أكثر من منوال فى فئة من البيانات والبيانات فى هذا النوع تعرف بأنها متعددة المنوال .

ولهذا ، فإن المشكلة الرئيسية بالنسبة للمنوال كقياس للترعة المركزية أنه لا يعرف أحيانا بطريقة وحيدة . وأيضا المنوال يشارك الوسيط فى عيب فقدانه لخواص رياضية مباشرة .

٨-٦ الانحراف المعياري

هذا مقياس للتشتت ، أو الانحراف . وهو يقيس تشتت مجموعة من البيانات . وهو مرتبط إلى حد كبير بالوسط الحسابى ، لأنه يعتمد على انحراف كل قيمة للبيانات عن الوسط الحسابى لها . ونفس الطريقة التى اعتبرت للمقاييس المركزية سوف نبحث عن الانحراف المعيارى أولا ، بالنسبة للبيانات غير المئوية ، ثم بالنسبة للبيانات المئوية .

(أ) بيانات غير مبوية

إذا كان لدينا n من الأعداد $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ لها وسط حسابي \bar{x} فالانحراف المعياري يعتمد على الفروق .

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$$

وإذا كانت قيم البيانات مجمعة بإحكام ، فكل هذه الفروق سوف تكون صغيرة ، ولكن إذا كانت قيم البيانات متباعدة ، فبعض الفروق سوف يكون كبيرا . والحالتان ممثلتان في شكل ٨-٤ .

وأنه يكون واقعا أن نستعمل « المتوسط » لهذه الفروق كمقياس للتغير .
وليس من المفيد أن نجد الوسط الحسابي لهذه الفروق ، وذلك لأنه لاى فئة من البيانات ، فالفرق السالبة ، والموجبة سوف تلاشى بعضها ، والنتيجة تكون صفرا .

وللحصول على الانحراف المعياري ، أى « متوسط » الفروق نتبع الطريقة التالية :

١ - أوجد مربعات كل الفروق . وهذا يلغى الإشارات السالبة وسوف نحصل على

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$$

٢ - أوجد متوسط مربعات الفروق

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

بيانات متباعدة جدا



بيانات مجمعة بإحكام



شكل ٨-٤

هذه نفسها مقياس للتغير وتعرف بالتباين . والمشكلة في التباين أن وحدته هي مربع وحدات البيانات .

٣ - أوجد الجذر التربيعي للنتيجة في الخطوة ٢ . فهذا يعطى الانحراف المعياري .

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

والذى له نفس الوحدات مثل وحدات البيانات . نستعمل رمز السجما فنحصل على

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

مثال ٨-٦-١ أوجد الانحراف المعياري للقيم 3 ، 5 ، 2 ، 9 ، 11 ؟

الاجابة :

$$\bar{x} = \frac{3+5+2+9+11}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

والفروق هي 3-6 ، 5-6 ، 2-6 ، 9-6 ، 11-6 .
أى 3 ، -1 ، -4 ، 3 ، 5 .

(ملاحظة المجموع = صفرا) . وهذا يعنى أن

$$s = \sqrt{\frac{(-3)^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + 3^2 + 5^2}{5}} = \sqrt{\frac{9+1+16+9+25}{5}} = \sqrt{\frac{60}{5}} \\ = \sqrt{12} = 3.46$$

تمرين ٨-٦-١ أوجد الانحراف المعياري للقيم 4 ، 2 ، 8 ، 7 ، 4 ، 5 ؟
بفرض أن الحسابات المعدلة السابقة لقيم s ليست جيدة لأنها تحتوى على إيجاد كل الفروق المنفرقة عن الوسط الحسابى . وأنه فى العادة أن نطبق الصورة التالية التى وصلنا إليها بمعالجة جبرية بسيطة للصورة السابقة .

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

مثال ٨-٦-٢ أوجد مرة أخرى الانحراف المعياري للقيم 3 ، 5 ، 2 ، 9 ، 11 ؟

الاجابة :

$$n = 5, \sum x = 3 + 5 + 2 + 9 + 11 = 30,$$

$$\sum x^2 = 9 + 25 + 4 + 81 + 121 = 240$$

وبالتالى :

$$s = \sqrt{\frac{240}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2} = \sqrt{48 - 36} = \sqrt{12} = 3.46$$

تمرين ٨-٦-٣ استخدم الصورة الحسابية لإيجاد الانحراف المعياري للأعداد 4 ، 2 ، 8 ، 7 ، 4 ، 5 ؟

(ب) بيانات مبوية

الانحراف المعياري للبيانات المبوية يعرف كاعتداد للانحراف المعياري للبيانات غير المبوية أى أننا نتصرف كما لو أن كل عضو فى الفئة يساوى مركز الفئة ، ونستمر كما فى حالة البيانات غير المبوية . افترض مرة أخرى التوزيع التكرارى والتالى لأوزان 150 مسمار قلاووظ :

الوزن (بالأوقية)	التكرار
5.01 وأقل من 5.00	4
5.01 وأقل من 5.02	18
5.02 وأقل من 5.03	25
5.03 وأقل من 5.04	36
5.04 وأقل من 5.05	30
5.05 وأقل من 5.06	22
5.06 وأقل من 5.07	11
5.07 وأقل من 5.08	3
5.08 وأقل من 5.09	1

(بيانات مأخوذة من ج م - الأسس ب - يونيو 1978)

مراكز الفئات لهذه الفئات هي 5.005 ، 5.015 ، 5.025 ، 5.035 ، 5.045 ، 5.055 ، 5.065 ، 5.075 ، 5.085 . وعند إيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة سوف نعامل الجدول كأنه ينص على أن 4 مسابير قلاووظ وزن 5.055 أوقية ، و 18 مسامير وزن 5.015 أوقية . وهكذا ، الوسط الحسابي للأوزان وجد في البند 8 - 2 ، وكان مساوياً 5.038 أوقية . وطبقاً للصورة الأولية للانحراف المعياري نجد أن

$$s = \sqrt{\frac{(5.005 - 5.038)^2 + (5.005 - 5.038)^2 + (5.005 - 5.038)^2 + (5.005 - 5.038)^2 + (5.015 - 5.038)^2 + \dots + (5.085 - 5.038)^2}{4 + 18 + \dots + 1}}$$

والتي يمكن أن تكتب بصورة أفضل كما يلي :

$$s = \sqrt{\frac{4 \times (5.005 - 5.038)^2 + 18 \times (5.015 - 5.038)^2 + \dots + 1 \times (5.085 - 5.038)^2}{4 + 18 + \dots + 1}}$$

وبصورة عامة نجد أن امتداداً لحالة البيانات المبوبة من الصورة الأصلية لتعريف الانحراف المعياري هي

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{\sum f}}$$

حيث أن x هي مراكز الفئات و f هي تكرارات الفئات . وباستخدام الصورة الحسابية بنفس الطريقة للبيانات نجد أن :

$$s = \sqrt{\frac{5.005^2 + 5.005^2 + 5.005^2 + 5.005^2 + 5.015^2 + \dots + 5.085^2}{4 + 18 + \dots + 1} - 5.038^2}$$

والتي يمكن أن تكتب بصورة أفضل كما يلي :

$$s = \sqrt{\frac{4 \times 5.005^2 + 18 \times 5.015^2 + \dots + 1 \times 5.085^2}{4 + 18 + \dots + 1} - 5.038^2}$$

وبصورة عامة نرى أن امتدادا للبيانات المبوبة لحساب الصورة الحسابية للانحراف المعياري هي

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f} \right)^2}$$

حيث أن x 's هي مراكز الفئات و f 's هي تكرارات الفئات . وكما هو متبع عند حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة في البند ٨-٧ ، فإن الطريقة المعتادة عمليا هو أن نكون حلولاً وتستخدم طريقة معدلة لتسهيل العملية الحسابية . والتعديل بالضغط كما هو في البند ٨-٧ ، أي نجد لكل مركز فئة x القيمة المعدلة

$$d = \frac{x - a}{c}$$

حيث a تسمى الوسط الحسابي الافتراضي و c هو طول كل فئة البيانات . بعد هذا نحسب الانحراف المعياري s_d للقيم d . وهذا التحويل يستخدم لإيجاد s أي الانحراف المعياري للبيانات الأصلية بطريقة أسهل . وببساطة نضرب المقدار في c لنحصل على

$$s = c \cdot s_d$$

فالانحراف المعياري لأوزان 150 مسمار قلاووظ قد حسب في الجدول التالي باستخدام الوسط الحسابي الافتراضي $a = 5.045$.

الوزن (بالأونصة)	التكرار f	مركز الفئة x	$d = \frac{x - 5.045}{0.01}$	fd	fd^2
5.00 وأقل من 5.01	4	5.005	-4	-16	64
5.01 وأقل من 5.02	18	5.015	-3	-54	162
5.02 وأقل من 5.03	25	5.025	-2	-50	100
5.03 وأقل من 5.04	36	5.035	-1	-36	36
5.04 وأقل من 5.05	30	5.045	0	0	0
5.05 وأقل من 5.06	22	5.055	1	22	22
5.06 وأقل من 5.07	11	5.065	2	22	44
5.07 وأقل من 5.08	3	5.075	3	9	27
5.08 وأقل من 5.09	1	5.085	4	4	16
	$\sum f = 150$			$\sum fd = -99$	$\sum fd^2 = 471$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f} \right)^2} = \sqrt{\frac{471}{150} - \left(\frac{-99}{150} \right)^2} = \sqrt{3.14 - 0.3456} = 1.6445$$

وبالتالي :

$$s = c \cdot s_d = 0.01 \times 1.6445 = 0.016445$$

ويكون الانحراف المعياري لأوزان المسامير الفلاووظ هو 0.016 أوقية .

الانحراف المعياري مقياس هام للتغير عمليا ، وذلك نتيجة لمميزاته الرياضية التي تسمح باستنتاج نتائج ذات قيمة . والوسط الحسابي والانحراف المعياري يعطيان معا ملخصا قويا لمجموعة البيانات . وعلى أى الأحوال فإن القيم الشاذة تؤثر فى الانحراف المعيارى .

وتوجد نتيجة هامة حصل عليها تشبشيف Chebyshev التي تنص على أن لأي مجموعة من البيانات فإن نسبة القيم الواقعة فى الفترة التي تحوى الوسط الحسابى والتي حدودها تمتد عه بمقدار k من وحدات الانحراف هي على الأقل $1 - (1/k)^2$. وبالتالي على سبيل المثال يقع على الأقل 3/4 القيم بين 2 من الانحرافات المعيارية من الوسط الحسابى . هذه نتيجة محافظة فإذا كانت البيانات تقترب من أى طريق من توزيع طبيعى فائنا يمكن أن نحصل على نصوص أكثر قوة . وسوف يصادفنا هذه النصوص عندما ندرس التوزيع الطبيعى بالبند ١٤ - ٦ ، وسوف نرى قائمة الوسط الحسابى والانحراف المعيارى فى حساب حدود الثقة وتكوين اختبارات معنوية فى الفصلين الخامس عشر ، والسادس عشر . على التوالي .

نمرين ٨-٦-٣ فيما يلى توزيع لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة لمدة أسبوع فى سنة ١٩٧٧ .

عدد العمال	الدخول الأسبوعية Σ
5	20 وأقل من 30
26	30 وأقل من 40
41	40 وأقل من 50
58	50 وأقل من 60
48	60 وأقل من 70
18	70 وأقل من 80
4	80 وأقل من 90

احسب الانحراف المعيارى لهذه الفئة من البيانات وأشرح معنى النتيجة التي تحصل عليها .
(م.م ١- الأساس ب- نوفمبر ١٩٧٧)

٨-٧ المقاييس الأخرى للانحراف

أبسط مقياس ممكن للانحراف من فئة البيانات هو المدى الذى يحسب بإيجاد الفرق بين أصغر قيمة ، وأكبر قيمة بالفئة . الحساب سهل ، ولكن هذا المقياس غير صالح فى حالة القيم المتحرفة للبيانات . وبصورة عامة فإنه ليس ذا قيمة فى التحليلات المتقدمة للبيانات .

وتستى العينة الصغيرة الخاصة بفيط جودة الانتاج من الحكم السابق . ولذا فسوف نفرض هنا عينات مكونة من 4 أو 5 عناصر سحبت من خط إنتاجى وقيست بعض الأبعاد والمدى فى قيم هذه الأبعاد لهذه العينات يمكن أن يستخدم لرسم خريطة الفيض ، حيث أن العينات يمثل هذا الحجم يكون المدى مرتبطا بطريقة بسيطة بالانحراف المعيارى للعينة . أنظر الفصل الثامن عشر لتوضيح خرائط الفيض .

ومقياس آخر للتغير ، مشابه عموما للانحراف المعيارى من حيث أنه يعتمد على انحراف كل قيمة عن الوسط

الحسابي للقيم وهو الانحراف المتوسط . وسوف نحصل عليه أولا في حالة البيانات غير المبوية ثم في حالة البيانات المبوية .

وبالنسبة للبيانات غير المبوية نخذ مرة أخرى البيانات المكونة من n من الأعداد $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ والوسط الحسابي لها هو \bar{x} والانحرافات التي نبني عليها مقياسا للتغير تعتمد على

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$$

وكما رأينا في البند ٨-٦ أنه ليس جيدا أن نأخذ الوسط الحسابي لهذه القيم حيث أنه دائما يساوى صفرا . ولايجاد الانحراف المعياري نربع هذه الانحرافات ونحسب الوسط الحسابي لهذه المربعات ثم نأخذ الجذر التربيعي لها . أما طريقة الحصول على الانحراف المتوسط فهي أكثر بساطة . فكل ما في الأمر علينا أن نهمل كل الاشارات السالبة بين هذه الانحرافات ونوجد متوسط القيم المطلقة .

القيمة المطلقة لعنصر ما نرمز لها بخططين عمودين نضع بينهما القيمة . أي أن الانحراف المتوسط يعطى بالمعادلة التالية

$$MD = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

وإذا استخدمنا علامة السجما نحصل على

$$MD = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

مثال ٨-٧-١ أوجد الانحراف المتوسط للأعداد التالية 3 ، 5 ، 2 ، 9 ، 11 ، الإجابة : الوسط الحسابي للأعداد هو $\bar{x}=6$ من ثم فإن فروق هذه الأرقام عن وسطها الحسابي هي

$$3 - 6, 5 - 6, 2 - 6, 9 - 6, 11 - 6$$

أي أن

$$-3, -1, -4, 3, 5$$

اذن الفروق المطلقة هي

$$|3 - 6| = 3, |5 - 6| = 1, |2 - 6| = 4, |9 - 6| = 3, |11 - 6| = 5$$

وعلى هذا فإن الانحراف المتوسط يكون

$$MD = \frac{3 + 1 + 4 + 3 + 5}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

تمرين ٨-٧-١ أوجد الانحراف المتوسط للأعداد التالية 4 ، 2 ، 8 ، 7 ، 4 ، 5 ، أما بالنسبة للبيانات المبوية ، فأننا نسلك نفس المنهج المتبع لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات المبوية . ويفرض أن كل عنصر من فئة البيانات يساوى مركز الفئة لهذه الفئة . وبعد ذلك نستمر في الاجراءات

مثل ما هو متبع للبيانات غير المبوبة . وباستخدام نفس المنطق المتبع في الحالات السابقة وذلك بفرض أن مركز الفئة x وتكرارات الفئة f فإن الانحراف المتوسط يعطى بالصورة التالية

$$MD = \frac{\sum f |x - \bar{x}|}{\sum f}$$

وباستخدام نفس الرموز الموجودة في الحالات الخاصة بحساب الوسط والانحراف المعياري للبيانات المبوبة . أي أننا نفرض الوسط الافتراضي a وطول الفئة c للفئات لتعديل مراكز الفئة x إلى $d = (x - a) / c$ ثم نحسب الانحراف المتوسط MD_d للمتغيرات d 's أي أن

$$MD_d = \frac{\sum f |d - \bar{d}|}{\sum f}$$

والعودة إلى حساب الانحراف المتوسط للبيانات الأصلية يتضمن نفس الخطوات التي اثبتت لحساب الانحراف المعياري ، وذلك بضرب القيمة السابقة في مقدار طول الفئة c . وعلى هذا النمط نحصل على

$$MD = c \cdot MD_d$$

ومرة أخرى يمكن وضعها في صورة جدول .

افترض مرة أخرى التوزيع التكراري التالي لأوزان 150 مسمار قلاووظ .

الوزن (بالأونصة)	التكرار
5.01 وأقل من 5.00	4
5.02 وأقل من 5.01	18
5.03 وأقل من 5.02	25
5.04 وأقل من 5.03	36
5.05 وأقل من 5.04	30
5.06 وأقل من 5.05	22
5.07 وأقل من 5.06	11
5.08 وأقل من 5.07	3
5.09 وأقل من 5.08	1

(البيانات مأخوذة من جدمم الأساس ب - يونيو ١٩٧٨)

وحساب الانحراف المتوسط يمكن الحصول عليه على النحو التالي :

الوزن (بالأونصة)	التكرار f	مركز الفئة x	$d = \frac{x - 5.045}{0.01}$	fd	$ d - \bar{d} $	$f d - \bar{d} $
5.01 وأقل من 5.00	4	5.005	-4	-16	3.34	13.36
5.02 وأقل من 5.01	18	5.015	-3	-54	2.34	41.12
5.03 وأقل من 5.02	25	5.025	-2	-50	1.34	33.50
5.04 وأقل من 5.03	36	5.035	-1	-36	0.34	12.24
5.05 وأقل من 5.04	30	5.045	0	0	0.66	19.80
5.06 وأقل من 5.05	22	5.055	1	22	1.66	36.52
5.07 وأقل من 5.06	11	5.065	2	22	2.66	29.26
5.08 وأقل من 5.07	3	5.075	3	9	3.66	10.98
5.09 وأقل من 5.08	1	5.085	4	4	4.66	4.66
	$\sum f = 150$			$\sum fd = -99$		$\sum f d - \bar{d} = 202.44$

$$\bar{d} = \frac{\sum fd}{\sum f} = \frac{-99}{150} = -0.66$$

وهذه القيمة نحن في حاجة اليها لحساب قيم $d - \bar{d}$. والانحراف المتوسط للقيم d 's هو

$$MD_d = \frac{\sum f |d - \bar{d}|}{\sum f} = \frac{202.44}{150} = 1.3496$$

وعلى هذا الانحراف المتوسط لأوزان المسامير القلاووظ هو

$$MD = c \cdot MD_d = 0.01 \times 1.3496 = 0.013496$$

أي أن الانحراف المتوسط لأوزان المسامير القلاووظ هو 0.013 أوقية .

وهذا المقياس يكون نسبيا سهلا في حسابه . ولكنه نادر الاستعمال وذلك لأن دالة القيمة المطلقة يصعب التعامل بها إلى حد ما رياضيا ، ولذا فإنه لا توجد نتائج بسيطة يمكن الحصول عليها من تفسيرات هذا المقياس كما هو الحال في الانحراف المعياري . الحسابات تعتمد على كل قيمة في البيانات ، ومن ثم القيم المتطرفة سوف تميل إلى تضخيم قيمة الانحراف المتوسط ، وعلى هذا فتأثيره أقل وضوحا من الانحراف المعياري .

تمرين ٨-٧-٢ فيما يلي توزيع لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة لمدة أسبوع سنة ١٩٧٧ .

الدخول الأسبوعية £	عدد العمال
20 وأقل من 30	5
30 وأقل من 40	26
40 وأقل من 50	41
50 وأقل من 60	58
60 وأقل من 70	48
70 وأقل من 80	18
80 وأقل من 90	4

أحسب الانحراف المتوسط لهذه الفئة من البيانات .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

مقياس آخر للانحراف التفرير هو الانحراف الربيعي ، أو نصف المدى الربيعي . والاسم الثاني هو وصف كامل للمقياس . وهذا المقياس قريب جدا . إلى الوسيط من حيث أن الوسيط هو الرقم الذى تقع نصف البيانات أسفله والنصف الآخر أعلاه ، فهذا يعنى أن الربيعيات هي النقط الرباعية للبيانات . والربيع الأول نرمز له بالرمز Q_1 يقع أدناه 25% من البيانات و75% من البيانات أعلى منه . والربيع الثاني هو الوسيط تد نفسه ، والربيع الثالث ، نرمز له بالرمز Q_3 يقع أدناه 75% من البيانات و 25% أعلى منه .

وبمعلومية Q_1 و Q_3 فالانحراف الربيعي يحسب على النحو التالى :

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

وبالنسبة للبيانات غير المبوبة فإن Q_1 يمكن أن نحصل عليها بنفس الطريقة مثل الوسيط . أما بالنسبة للفئات الصغيرة من الأرقام فإننا نرتبها تصاعديا طبقا لرتبتها ونختار القيمة التي يقع أعلاها ثلاثة أضعاف القيم التي تقع أسفلها . أما بالنسبة للفئات الكبيرة من الأرقام فنشطب ، وأكبر ثلاثة أعداد على التوالي حتى يتبقى عدد واحد . ونفس الشيء يتبع مع Q_3 .

وعلى أى الأحوال فإن الانحراف الربيعي يستخدم عادة للبيانات المبوبة حيث أن الريميات توجد بنفس طريقة إيجاد الوسيط في البند ٨-٣ . أى أنه يرسم مستقيمات عند 25% وعند 75% من مستويات التكرارات المتراكمة إلى المفضلح التكرارى المتجمع (أو جيف) ثم اسقاطهم على المحور الأفقى ، أو باستخدام القانون المكافئ . افترض مرة أخرى التوزيع التكرارى التالى لأوزان 150 مسمار قلاووظ .

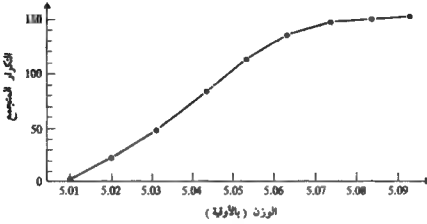
الوزن (بالأونصة)	التكرار
5.01 وأقل من 5.00	4
5.01 وأقل من 5.02	18
5.02 وأقل من 5.03	25
5.03 وأقل من 5.04	36
5.04 وأقل من 5.05	30
5.05 وأقل من 5.06	22
5.06 وأقل من 5.07	11
5.07 وأقل من 5.08	3
5.08 وأقل من 5.09	1

(البيانات من م م م الأساس ب - يونيو ١٩٧٨)

الجدول التكرارى المتجمع يكون على الصورة التالية

الوزن (بالأونصة)	التكرار
أقل من 5.01	4
أقل من 5.02	22
أقل من 5.03	47
أقل من 5.04	83
أقل من 5.05	113
أقل من 5.06	135
أقل من 5.07	146
أقل من 5.08	149
أقل من 5.09	150

والمفضلح التكرارى المتجمع (أوجيف) من هذا الجدول يوضح فى الشكل ٨-٥ .



شكل ٨ - ٥

وبما أن التكرار الكلي هو 150 و 25% من هذه القيمة هي 37.5 و 75% من هذه القيمة هي 112.5 فإننا نرسم خطوطاً أفقية عند هذه المستويات ، ثم نسقطها على المحور الأفقي . عند تطبيق هذه الطريقة يكون من الأفضل استخدام مقياس رسم كبير على ورق الرسم البياني .

وباستخدام نفس المنطق ونفس الرموز ، كما استخدمت في إيجاد الوسيط للبيانات المبوبة التي في البند ٣ - ٨ فإننا يمكن أن نحصل على الصيغتين التاليتين للربيع الأول والربيع الثالث .

$$Q1 = L + \frac{(25\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$$

$$Q3 = L + \frac{(75\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$$

وفي هذا المثال بالنسبة للربيع الأول فإن $Q1 = 25\% = 37.5$ ، $P1 = 22$ ، $P2 = 47$ ، $L = 5.02$ ، $U = 5.03$ ، وعلى هذا فإن

$$Q1 = 5.02 + \frac{(37.5 - 22)}{(47 - 22)} \times (5.03 - 5.02) = 5.02 + \frac{15.5}{25} \times 0.01 = 5.02 + 0.0062 = 5.0262$$

وبالنسبة للربيع الثالث $Q3 = 75\% = 112.5$ ، $P1 = 83$ ، $P2 = 113$ ، $L = 5.04$ ، $U = 5.05$ ، وعلى هذا فإن

$$Q3 = 5.04 + \frac{(112.5 - 83)}{(113 - 83)} \times (5.05 - 5.04) = 5.04 + \frac{29.5}{30} \times 0.01 = 5.04 + 0.0098 = 5.0498$$

وبالتالي الانحراف الربيعي يكون

$$QD = \frac{Q3 - Q1}{2} = \frac{5.0498 - 5.0262}{2} = 0.0118$$

أي أن التغير في الوزن من مسمار إلى مسمار آخر ، كما هو مقياس بالـ QD يساوي 0.012 أوقية .

والانحراف الربيعي يتأثر بصورة أقل بالقيم المتطرفة عن مقاييس الانحرافات الأخرى السابقة لأنها تستبعد الربيع الأسفل والربيع الأعلى من البيانات . وهذه سمة قيمة ولكنها يمارسها البعض لأنها وسيلة متلفة لقياس التغير حيث أن نصف القيم لا تستخدم مباشرة في الحسابات ، وأيضا فهو غير معبر لأن الفروق في التغير في الربيع السفلي ، والربيع العلوي سوف لا تؤثر في هذا المقياس . والانحراف الربيعي لا يمكن أن يستخدم في تحليلات أبعد لهذه البيانات .

تمرين ٨-٧-٣ : اعتبر مرة أخرى البيانات التالية لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة خلال أسبوع في سنة ١٩٧٧ .

عدد العمال		الدخول الأسبوعية
		£ £
5	20	واقل من 30
26	30	واقل من 40
41	40	واقل من 50
58	50	واقل من 60
48	60	واقل من 70
18	70	واقل من 80
4	80	واقل من 90

احسب الانحراف الربيعي لهذه الفتحة من البيانات .

(١) بالرسم مستخدما المضلع التكراري المتجمع (أوجيف)

(٢) بحساب الربيع الأول والثالث .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

وأخر مقياس للتغير هو معامل التغير . وهذا لا يقيس مباشرة التغير ، كما هو متبع بالنسبة للمقاييس التي درست مسبقاً في هذا الفصل ، ولكن هو مقياس للتغير النسبي أي أنه يقيس التغير بالنسبة للحجم الحقيقي لقيم البيانات . ويعتمد معامل التغير على الوسط الحسابي والانحراف المعياري ويحسب كما يلي :

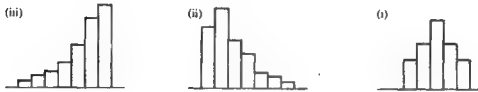
$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

وهو الانحراف المعياري كنسبة مئوية للوسط الحسابي . ويوجد نوعان من المواقف حيث يكون استخدام معامل التغير مفيداً ، أولاً إذا كان لدينا فئتان من البيانات حيث أن الأرقام لهما أحجام كلية مختلفة ونريد أن نعين من منهما « أكثر تغيراً » وعلى سبيل المثال فإن انحرافاً معيارياً قدره £5 أسبوعياً لمتوسط دخل أسبوعي مقداره £150 يكون غير هام بينما انحراف معيارى قدره £5 أسبوعياً لمتوسط دخل أسبوعي مقداره £20 سيكون تغير خطيراً .

ثانياً : إذا أردنا أن نقارن التغيرات لفئات من بيانات مقاسة بوحدات مختلفة فإن معامل التغير لا يعتمد على الوحدات وذلك لأن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهما نفس الوحدات حيث أن الوحدات ستلاشى عند إيجاد النسبة المئوية .

٨-٨ الألتواء

إعتبر المدرجات التكرارية الثلاثة الموضحة بالشكل ٨-٦ . الشكل (i) يمثل بيانات متماثلة والشكل (ii) به معظم القيم صغيرة وتوجد تكرارات صغيرة متتالية لحدوث قيم كبيرة وبيانات هذا النوع تعرف بأنها موجبة الألتواء . ومثل هذا التوزيع مرتبط عامة بالدخول ، وزمن الخدمة للموظفين في مؤسسة ما . وفي شكل (iii) من الناحية الأخرى نجد أن معظم قيم البيانات كبيرة وتوجد تكرارات صغيرة متتالية لحدوث القيم الصغيرة . وبيانات هذا النوع تعرف بأنها سالبة الألتواء . ومثل هذا النظام يحدث إذا نظرنا إلى توزيع أعمار المتقاعين بالمعينات السمية .



شكل ٨-٦

ومقاييس معينة للألتواء يمكن أن تحسب من فئة البيانات التي تعتمد في إحدى الحالات (معامل بيرسون) على القيم النسبية للوسط والوسيط وفي حالة أخرى (معامل بولس) على القيم النسبية للوسيط والربيعيات . ونلاحظ أنه بالنسبة للبيانات المتماثلة الموضحة بالشكل (i) فالوسط الحسابي والوسيط والمتوال تنطبق على بعض ، والربيع الأول والثالث متساوية البعد من القيمة المشتركة . ولمثل هذه البيانات فإن مقاييس الألتواء تأخذ القيمة صفراً .

(أ) معامل بيرسون

عندما يكون لدينا بيانات ملتوية فالوسط الحسابي سوف يكون منحرفاً إلى نهاية المدرج التكراري أكثر من الوسيط الذي بالتعريف يقسم مساحة المدرج التكراري إلى نصفين . وهذا موضع في الشكل ٨-٧ .

وبالتالي فإنه سوف يكون مناسباً أن نجعل مقياس الألتواء يعتمد على الفرق بين الوسط الحسابي ، والوسيط . وهذا بلا ريب سوف يكون موجباً في حالة البيانات ذات الألتواء الموجب وسالباً في حالة البيانات ذات الألتواء السالب .

ولكن ، مقدار هذا الفرق سوف يعتمد أيضاً على مقدار انتشار البيانات . ولذا فإنه من الضروري أن نحاول أن نتخلص من تأثير هذا الانتشار لكي نحصل على مقياس دقيق للألتواء . وهذا يتم بقسمة هذا الفرق على الانحراف المعياري . ولأسباب تاريخية فإن الضرب في العدد 3 سوف يستخدم أيضاً ويكون لدينا .

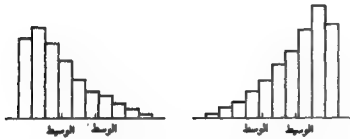
$$\text{معامل بيرسون للألتواء} = \frac{3 \times (\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

مثال ٨-٨ = ١ بالنسبة لموظفي شركة ما ، أوجد معامل بيرسون اذا كان متوسط المدفوعات الأسبوعية الكلية هو £95.49 والوسيط للمدفوعات الأسبوعية الكلية هو £65.28 بينما الانحراف المعياري للمدفوعات الأسبوعية الكلية هو £42.57 .

الاجابة معامل بيرسون للأتواء لهذه المدفوعات يحسب على الوجه التالي

$$\frac{3 \times (95.49 - 65.28)}{42.57} = \frac{3 \times 30.21}{42.57} = \frac{90.63}{42.57} = 2.13$$

وهذا يدل على أن الأتواء موجب ، ولكن لا يوجد نص رياضي دقيق يمكن أن يؤسس على معامل بيرسون . ولكن يمكن أن نستعمله وصفا فقط أو لكي نوجد نوعا ما من المقارنة بين الأشكال المختلفة .



شكل ٨-٧

تعرين ٨-٨ = ١ احسب معامل الأتواء لتوزيع تكراري له القيم التالية : الوسط الحسابي = 10 ، والوسيط = 11 ، والانحراف المعياري = 5 . وما هو مذكور اجابتك بالنسبة لهذا التوزيع التكراري ؟

(ب) معامل بولبي

نلاحظ من تعريف الوسيط والريميات ، أن مساحة المدرج التكراري بين الربع الأول والوسيط هي ربع المساحة الكلية . وبالمثل مساحة المدرج التكراري بين الوسيط والربع الثالث هي ربع المساحة الكلية (أنظر شكل ٨-٨) .

وبالنسبة للبيانات ذات الأتواء الموجب فالمستطيلات التي بين الوسيط و Q3 هي أقصر من المستطيلات بين Q1 والوسيط . ولأجل أن تحوى نفس المساحة ، فالمسافة بين Q3 والوسيط لابد أن تكون أكبر من المسافة بين Q1 والوسيط . والعكس سوف يكون في حالة البيانات ذات الأتواء السالب .

وبالتالي فإنه سوف يكون منطقي أن الأتواء سوف يعتمد على

$$(Q3 - \bar{x}) - (\bar{x} - Q1)$$

وهذا المقدار سوف يكون موجبا في حالة البيانات الموجبة الأتواء وساليا في حالة البيانات السالية الأتواء . ولكي نلغي تأثير الانتشار فإنه من الضروري مرة أخرى أن نقسم على مقياس للتغير ، وأكثر مقياس مناسب في هذا المجال هو الانحراف الربيعي وبالتالي نحصل على

$$\frac{(Q3 - \bar{x}) - (\bar{x} - Q1)}{QD}$$

أى أن

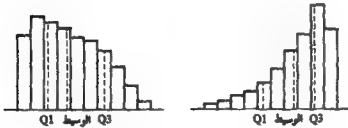
$$\text{معامل بولوى} = \frac{Q1 + Q3 - 2\bar{x}}{(Q3 - Q1)/2}$$

مثال ٨-٢ أوجد معامل بولوى للألتواء بالنسبة لموظفى شركة معينة اذا كان الوسيط للمرتبات الأسبوعية هو £65.28 والربيع الأول هو £36.17 والربيع الثالث هو £124.52 .

الاجابة معامل بولوى يساوى

$$\frac{36.17 + 124.52 - 2 \times 65.28}{(124.52 - 36.17)/2} = \frac{160.69 - 130.56}{44.175} = 0.68$$

نفس التعليقات العامة تطبق هنا كما فى حالة معامل بيرسون ، أى بمعنى آخر ، فان معامل بولوى لا يمكن أن يستعمل كتحليل رياضى متقدم للبيانات ، ولكنه مقياس وصفى بحت .



شكل ٨-٨

تمرين ٨-٢-٢ البيانات التالية هى توزيع لدخول عمال متوسطى الكفاة لمدة أسبوع فى سنة ١٩٧٧ :

الدخول الأسبوعية £	عدد العمال
20 وأقل من 30	5
30 وأقل من 40	26
40 وأقل من 50	41
50 وأقل من 60	58
60 وأقل من 70	48
70 وأقل من 80	18
80 وأقل من 90	4

احسب معامل بولوى للألتواء لهذه الفئة من البيانات وفسر النتيجة .

(٢٢٢ أ- الأسس ب- نوفمبر ١٩٧٧)

تعارين :

٨-١ (أ) المطلوب :

ضع الوسيط الحسابي ، والوسيط ، والنوال بترتيب اهميتها كمتوسطات للتوزيعات التكرارية التالية ، وشرح باختصار ترتيبك في كل حالة .

(١) الدخل ، المأخوذة من احصائيات للأجور .

(٢) مقاسات أحذية السيدات معتمدة على بيانات المبيعات .

(٣) نسبة المنتجات المعيبة معتمدة على اختبار المجموعات .

(ب) يوضح الجدول التالي عدد الساعات لضوء الشمس المسجلة خلال شهر يوليو في « بورن بول » خلال الفترة الزمنية ١٩٦٥ - ٧٣ .

عدد الأيام	عدد ساعات ضوء الشمس
1	0 وأقل من 1
2	1 وأقل من 2
4	2 وأقل من 3
11	3 وأقل من 4
24	4 وأقل من 5
35	5 وأقل من 6
43	6 وأقل من 7
49	7 وأقل من 8
54	8 وأقل من 9
31	9 وأقل من 10
15	10 وأقل من 11
10	11 وأقل من 12
279	

المطلوب : احسب :

(١) متوسط عدد ساعات ضوء الشمس .

(٢) الوسيط لعدد ساعات ضوء الشمس .

(ج) م الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٥)

٨-٢ (أ) عرف الوسيط ، والوسيط الحسابي ، والنوال مع ذكر المزايا ، والعيوب الخاصة بكل منها .

(ب) (١) احسب الوسيط والوسيط الحسابي والنوال لما يلي :

عدد الموظفين	أجر المحفص ، معدل الزيادة بالنسبة لعدد الساعات باليوس
5	30 وأقل من 60
25	60 وأقل من 70
134	70 وأقل من 80
85	80 وأقل من 90
69	90 وأقل من 100
43	100 وأقل من 110
34	110 وأقل من 120

(م م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

(٢) وضع فائقة كل من الاحصائيات الثلاث المحسوبة .

٨-٣ (أ) مستخدماً الأرقام المعطاة فيما يلي احسب الآتي :

- (١) المدى ؛
- (٢) الوسط الحسابي ؛
- (٣) الوسيط ؛
- (٤) الربيع الأدنى ؛
- (٥) الربيع الأعلى ؛
- (٦) الانحراف الربيعي ؛
- (٧) الانحراف المتوسط ؛
- (٨) الانحراف المعياري .

2	15	26	39	47	58
5	17	30	40	51	60
7	18	32	43	53	64
8	22	36	45	55	66
11					

(ب) اشرح المصطلح « مقياس التشتت » وأذكر بإختصار مزايا وعيوب استخدام المقاييس التالية للتشتت :

- (١) المدى ؛
- (٢) الانحراف الربيعي ؛
- (٣) الانحراف المتوسط ؛
- (٤) الانحراف المعياري .

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٨٠)

٨-٤ التوزيع التالي قد أخذ من تقدير أعد بواسطة قسم ضبط الانتاج لشركة صناعية :

مروضات (وحدات للتاج)	عدد اللبقات
13 إلى 17 شامل	20
18 إلى 22 شامل	30
23 إلى 27 شامل	30
28 إلى 32 شامل	32
33 إلى 37 شامل	28
38 إلى 42 شامل	22
43 إلى 47 شامل	12
47 إلى 52 شامل	6

المطلوب منك هو الآتي :

(أ) احسب من خلال التوزيع المعطى السابق :

- (١) الوسط الحسابي ؛
- (٢) الانحراف المعياري ؛

(ب) اشرح معنى الانحراف المعياري بالنسبة للمثال السابق .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٦)

الفصل التاسع

تحليل الانحدار والارتباط

٩-١ الشكل الانتشاري

عند التفكير في الانحدار والارتباط فأنتا نهتم بعلاقات بين المتغيرات . وهدفنا في هذا الفصل هو علاقة عملية لتوضيح أهمية تطبيق هذه الوسائل للحصول بطريقة صحيحة على صيغة تتحقق بواسطتها هذه الأهداف عمليا .

إذا كان الموضوع ينظر إليه على هذا المستوى ، فالانحدار يمكن أن يعتبر كوسيلة لإيجاد أفضل علاقة من نوع محاس بين المتغيرات المأخوذة في الاعتبار من مجموعة بيانات والارتباط كوسيلة لقياس مقدار جودة هذه العلاقة لتلائم البيانات . وإنشاء تعيين علاقات بهذه الطريقة مفيد ، وذلك لأنها تسمح لنا أن نتوقع فيما لأحد المتغيرات من معلومية بقية القيم .

البيانات التالية تعطى التكلفة لكل وحدة إنتاج (y) والناتج الكلى (x) لمصنع ما :

الناتج الكلى £	التكلفة لكل وحدة الإنتاج £
10	20
18	14
25	12
20	14
16	15
30	9
32	9
34	8
9	28
24	11

(البيانات مأخوذة من م م ت ١ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٤)

نحن نهتم هنا بالعلاقة الممكنة بين تكلفة كل وحدة من الناتج ، وعدد الوحدات الناتجة وذلك يكون لدينا متغيران فقط (وهذه هي الحالة الوحيدة التي سوف نهتم بها) الخطوة الأولى للبحث عن علاقة هو أن نرسم رسما بيانيا مع أخذ المتغير x على المحور الأفقى ، والمتغير y على المحور الرأسى . ومثل هذا الرسم البياني يعرف بالرسم البياني المشترك . والشكل الانتشاري للبيانات في مثالنا في الشكل موضع ٩-١ .

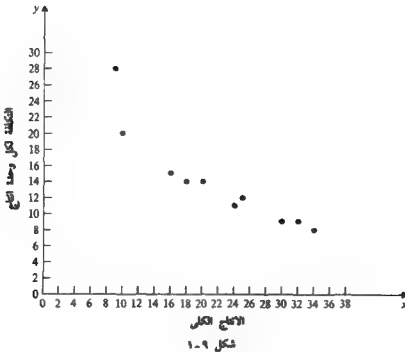
٢-٩ الانحدار الخطي

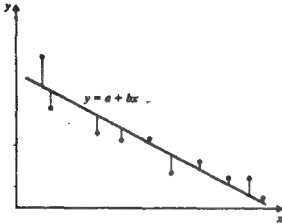
أيجاد أفضل علاقة بين x و y يؤدي إلى إيجاد المنحني من نوع محدد والذي يمر « بأقرب » ما يمكن لنقط البيانات ، ثم إيجاد المعادلة لهذا المنحني . وطريقة الانحدار لا تدلنا على أفضل نوع للمنحني ، ولكن لابد علينا أن نحدد هذا لأنفسنا لكي نبدأ الطريقة . فمن فحصنا للشكل الانتشاري نرى أن الخط المستقيم هو المنحني المناسب للاستعمال . وفي الحقيقة الحالة الوحيدة التي سوف ندرسها هي الحالة التي يناسبها الخط المستقيم . أي ما سوف نبدأ به الآن يعرف بالانحدار الخطي .

ويعد أن قررنا أننا سوف نستعمل الخط المستقيم فطريقة الانحدار يمكن أن نستعمل لإيجاد أفضل خط مستقيم . وبالنسبة للمتغيرات لهذا المثال ، فإننا نبحث عن الكمية المنتجة التي تؤثر على سعر الوحدة الواحدة بدلا من العكس فنوع الشيء الذي نريد أن يكون استخدام خط الانحدار ، ولكي نتبأ بتكلفة الوحدة الواحدة إذا صنعنا عددا معينا من الوحدات . وبالتالي تكون x هي المتغير المستقل و y هي المتغير التابع ، ونحن نبحث عن انحدار y على x . ومن المألوف أن نستخدم الرمز x و y بهذا الترتيب ولكنه ليس ضروريا ويمكن أن نحسب انحدار x على y باستخدام نفس المبادئ ، ولكن بتبديل وضع x و y .

ولكي نرى كيف أن خط انحدار y على x معرف أنظر إلى شكل ٢-٩ . فانه الخط بحيث تكون مجموع مربعات الانحرافات لنقط البيانات في اتجاه y صغيرة على قدر الامكان . والمعادلة العامة لمثل هذا الخط هي (أنظر البند ١-٢)

$$y = a + bx$$





شكل ٢-٩

حيث أن a و b ثوابت . ويجب أن نعين a و b التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات في اتجاه y أقل ما يمكن . وبالنسبة لهذا المثال فإنه يعنى أننا لا بد أن نجد a و b لتصغير

$$(a + b \times 10 - 20)^2 + (a + b \times 18 - 14)^2 + (a + b \times 25 - 12)^2 + (a + b \times 20 - 14)^2 \\ + (a + b \times 16 - 15)^2 + (a + b \times 30 - 9)^2 + (a + b \times 32 - 9)^2 + (a + b \times 34 - 8)^2 \\ + (a + b \times 9 - 28)^2 + (a + b \times 24 - 11)^2$$

وبصفة عامة نحتاج a و b لتصغير

$$\Sigma(a + bx - y)^2$$

حيث أن المجموع على جميع الأزواج من قيم البيانات .

وعملية التصغير هي تمرين بسيط في حساب التفاضل (أنظر الفصل الخامس) الذي يؤول إلى المعادلتين التاليتين

لكل من a و b

$$na + b\Sigma x = \Sigma y$$

$$a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy$$

حيث أن n هي عدد أزواج قيم البيانات .

وتعرف هذه المعادلات الأختلافية ويمكن أن تُستخدم عملياً لإيجاد a و b بالتعويض عن قيم n ، Σx ، Σy ، Σxy و Σx^2 ثم تحل . ومهما كان فإنه من المعتاد أكثر أن توجد b من معادلة a وذلك بحل a بين المعادلتين ثم نوجد a باعادة صيغة المعادلة الأولى . وبالتالي فأننا نحصل على :

$$b = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}$$

$$a = \frac{\Sigma y - b\Sigma x}{n}$$

وبالنسبة للمثال السابق فانه في هذه الحالة : $n=10$

$$\begin{aligned}\Sigma x &= 10 + 18 + 25 + 20 + 16 + 30 + 32 + 34 + 9 + 24 &= 218 \\ \Sigma y &= 20 + 14 + 12 + 14 + 15 + 9 + 9 + 8 + 28 + 11 &= 140 \\ \Sigma x^2 &= 10^2 + 18^2 + 25^2 + 20^2 + 16^2 + 30^2 + 32^2 + 34^2 + 9^2 + 24^2 &= 5442 \\ \Sigma xy &= 10 \times 20 + 18 \times 14 + 25 \times 12 + 20 \times 14 + 16 \times 15 + 30 \times 9 \\ &\quad + 32 \times 9 + 34 \times 8 + 9 \times 28 + 24 \times 11 &= 2618\end{aligned}$$

وعلى هذا

$$b = \frac{2618 - 218 \times 140/10}{5442 - 218^2/10} = \frac{2618 - 3052}{5442 - 4752.4} = \frac{-43}{689.6} = -0.63$$

واشارة b السالبة تدل على خط مائل الى أسفل وذلك كان متوقعا من فحص الشكل الانتشاري .

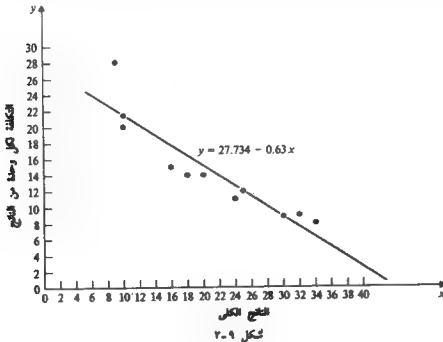
$$a = \frac{140 - (-0.63) \times 218}{10} = \frac{140 + 137.34}{10} = \frac{277.34}{10} = 27.734$$

فمعادلة خط انحدار y على x هي

$$y = 27.734 - 0.63x$$

وبسبب الطريقة التي عرف بها الخط الذي أوجدنا معادلته فانه يسمى بخط انحدار المربعات الصغرى . وهذه المعادلة هي أفضل علاقة مطلوبة من النوع الخطي بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y .

وخط الانحدار يمكن أن يرسم على الشكل الانتشاري بإختيار أى قيمتين ملائمتين للمتغير x ، وحساب قيم y المناظرة ، ورسم النقطتين الناتجتين والوصل بينهما مع مد الخط . وهذا قد تم في مثالنا - كما في شكل ٩ - ٣ باستخدام $x=30$ و $x=10$ كقيمتين مختارتين للمتغير x . وسوف نتفق بفحص الشكل ٩ - ٣ بأنه مناسب وهو بالنسبة إلينا الخط



التي ينتج عن طريقة المربعات الصغرى . والشئ الذي يراود أن نحصل عليه إذا طلب أن نوفق الخط مع التقط بالعين المجردة ، وذلك بتحريك مسطرة ، ورسم الخط الذي ندرک أنه مناسب بطريقة بديهية . وفوائد استخدام طريقة المربعات الصغرى هي أنها موضوعية (كل شخص معطى نفس مجموعة البيانات سوف يحصل على نفس الخط) وقيم a و b التي تم الحصول عليها بهذه الطريقة لها خواص إحصائية مرغوب فيها وساعدنا استخدام الخط في التنبؤات .

تمرين ٩-٢-١

(١) استعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد معادلة أفضل خط مستقيم يوافق البيانات التالية . المتغير المستقل هو x .

x	11	13	14	17	18	21	26
y	20	23	25	28	30	34	38

كل الحسابات لابد أن توضح .

(ب) ارسم شكل البيانات المشتقة ، وأرسم الخط الانحداري للمربعات الصغرى على الشكل الانتشاري

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

تمرين ٩-٢-٢ تشير البيانات التالية الى الزمن اللازم لاجراء عملية ما وتكلفتها . أوجد خط الانحدار للمربعات الصغرى للتكلفة على الزمن ، ووضح بيانيا مقدار تألف البيانات مع الخط . وضع على رسمك البياني القيمة المعطى للخط الناتج عن استخدامنا خط الانحدار في تقدير التكلفة لهذه العمليات .

الزمن (بالدقائق)	تكلفة (£)
4	7
4	4
5	7
6	9
7	10
8	14
10	18
12	18

(ح م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٩)

٩-٣ التنبؤ

بعد أن وجدنا انحدار y على x يمكننا أن نستخدمه للتنبؤ عن قيم y مقابل قيم x المعطاه . (لاحظ أن هذه المعادلة لا تستعمل للتنبؤ عن قيمة x مقابل y المعطاه) وإذا كان هذا النوع من التنبؤ هو المطلوب فإن انحدار x على y يجب أن يحسب ويستعمل . والتنبؤ يمكن أن يتم بيانيا عن طريق قراءة قيم y المناظرة من الرسم البياني أو عن طريق التعويض بقيمة y المعطاه في معادلة الانحدار وحساب قيمة x .

وبالنسبة للمثال المعطى في البند ٩-١ نجد أن في البند ٩-٢ انحدار y على x هو

$$y = 27.734 - 0.63x$$

ويفرض أننا نريد معرفة سعر الوحدة الواحدة المتوقع إذا قررنا أن نصنع 22 وحدة . فمن المعادلة قيمة y المتنبأ بها هي

$$y = 27.734 - 0.63 \times 22 = 27.734 - 13.86 = 13.874$$

أي بمعنى آخر : إن السعر المتوقع لكل وحدة هو 13.87 جنيهها (£) .

(هذه هي قيمة y التي حصل عليها من القراءة عند $x=40$ بالشكل ٩-٣) . بعد هذا افترض أننا نريد أن نعرف سعر كل وحدة المتوقع إذا قررنا صنع 40 وحدة . فمن المعادلة تكون قيمة y المتوقعة هي

$$y = 27.734 - 0.63 \times 40 = 27.734 - 25.2 = 2.534$$

أي بمعنى آخر السعر المتوقع لكل وحدة هو £2.53 . (هذه هي قيمة y الناتجة من القراءة عند $x=40$ بالشكل ٩-٣) .

وبالرغم من أن المثالين السابقين متماثلان في الحسابات ولكنه يوجد فارق كبير بينهما ففي الحالة الأولى قيمة y تم التنبؤ عنها مقابل قيمة x في نطاق قيم x في البيانات الأصلية . وهذه العملية تعرف بالاستكمال الداخلي . في الحقيقة قيم x الخاصة التي استعملت كانت تساوي تقريبا متوسط قيم x في البيانات الأصلية ، فإنه من المناسب جدا إذا كانت 22 وحدة قد انتجت فمتوسط سعر الوحدة الواحدة يكون حوالي 14 (£) جنيهها . وبصورة أعم نستطيع القول بأن الاستكمال الداخلي هو طريقة أكثر فاعلية والتي سوف تؤدي إلى تنبؤات دقيقة . وإذا كانت هناك توزيعات مناسبة بخصوص البيانات فإتانا نستطيع أن نتابع لإيجاد حدود الثقة لتقدير معاملات الانحدار a و b والتنبؤ من الانحدار بأن الحدود على توقعات الاستكمال الداخلي سوف تكون ضيقة .

وكلما كانت قيمة x المستعملة قريبة من قيم التنبؤ لمتوسط قيم x من البيانات الأصلية ، كلما كانت حدود الثقة للتنبؤ أضيق ما يمكن .

وفي الحالة الثانية قيمة y قد تم التنبؤ عنها مقابل قيمة x خارج نطاق قيم x في البيانات الأصلية . وهذه العملية تعرف بالاستكمال الخارجي فالاستكمال الخارجي هو عملية أقل فاعلية عن الاستكمال الداخلي . فالقيمة £2.53 لكل وحدة (التي تم الحصول عليها من مثالا السابق) تكون غير مقنعة ، وذلك لأنها ليس لها معنى محتمل في استمرار زيادة الناتج الكلي لهبوط تكلفة الوحدة نسبيا . ففي الحقيقة إذا كنا نتبأنا بهذه الطريقة للقيمة $x=46$ مثلا ، فإننا سوف نحصل على النتيجة التي ليس لها معنى ، وهي تكلفة سالبة للوحدة الواحدة . والملاحظ هو أن علاقة الانحدار وجدت بطريقة المربعات الصغرى في نطاق قيم المتغير المستقل للبيانات المستخدمة ، فليس من الضروري أن العلاقة تكون صحيحة على الإطلاق لقيم المتغير المستقل خارج هذا النطاق ، وبالتأكيد في مثلنا هذا أنه من الواضح أن هذه العلاقة تفشل إذا أخذنا قيمة للمتغير x بعيدة جداً عن نطاق القيم الأصلية . وزد على ذلك أنه إذا كانت علاقة الانحدار تعني شيئا خارج عن نطاق القيم الأصلية ، فحساب فترات الثقة للتنبؤ ينتج عنه فترات واسعة واضحة كما أنه يوجد التباس ملحوظ بالنسبة للقيم المتنبأ بها . وبالرغم من هذه المخاطر المتعلقة بالاستكمال الخارجي فهو شيء لابد أن يجري في بعض الحالات ويلاحظ أنه في حالة التنبؤ بالقيم المستقبلية باستخدام علاقة الانحدار حيث الزمن متغير مستقل . فالمهم في هذه الحالة هو أن نضع في الذهن الخطورة الموجودة وأيضا لا نحاول التنبؤ للمستقبل البعيد .

تعيين ٩-٣-١ المبيعات الكلية للكهرباء في بريطانيا العظمى خلال السنين 1964 — 1974 معطاه كما يلي

السنة	المبيعات الكلية (الف مليون واط ساعة)
1964	140 374
1965	151 071
1966	156 931
1967	161 664
1968	173 925
1969	185 423
1970	193 907
1971	199 442
1972	206 370
1973	220 591
1974	213 888

(أ) أوجد المعادلة لخط المربعات الصغرى لتوفيق البيانات .

(ب) واعتمادا على البيانات المعطاة والمعادلة الناتجة من (أ) أوجد تقدير المبيعات للكهرباء في سنة 1977 وعلق على هذا التقدير .

(م م أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٧)

(هذا التمرين يوضح استعمالا شائعا لانحدار المربعات الصغرى الذى سوف نتعرض له مرة أخرى عندما ندرس السلاسل الزمنية في الفصل العاشر . ولكي يأخذ متغير الزمن x قيم سهلة الاستخدام فانه من الضروري أن نعرف زمنا مناسباً بأنه الزمن الصغرى . ثم ، بالنسبة لمثل هذه البيانات السنوية أستخدم السنة الواحدة كوحدة الزمن . وبالتالي اذا كانت سنة 1964 هي المختارة كصفر زمني ، فقيم x ستكون 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 بينما اذا كانت سنة 1969 مثلاً ، اختيرت كصفر زمني فقيم x في هذه الحالة ستكون -5 ، -4 ، -3 ، -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5)

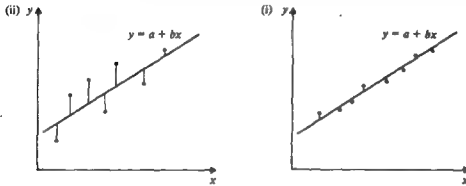
٩-٤ الارتباط

كما هو مذكور في البند ٩-١ الارتباط يمكن أن يعتبر وسيلة لقياس كيفية موافقة علاقة من نوع معين لفئة البيانات لصوره أفضل . وملاحظة ما فعلنا بالعلاقة المثلى المعروفة على أنها التي تُصغر مجموع مربعات الانحرافات في اتجاه y ونرى كيف أن جودة أفضل علاقة ستعتمد على مقدار صغر مجموع مربعات الانحرافات عند تصغيرها .

اعتبر الشكل ٩-٤ . فضلى الانحدار الموضحين لهما نفس المعادلة ، ولكن مجموع مربعات الانحرافات في اتجاه y لنقط البيانات حول الخط في الشكل (i) (حيث أن التوفيق يكون جيد) ويكون أصغر بكثير من مجموع مربعات الانحرافات في اتجاه y لنقط البيانات حول الخط في الشكل (ii) حيث أن التوفيق أضعف . ومعامل الارتباط " r " يعتمد على مجموع المربعات للانحرافات في اتجاه y عن أفضل خط . معبراً عنه كنسبة للانحراف الكلى في قيم y مقاسة كمجموع المربعات حول الوسط الحسابي ، أى بمعنى آخر معامل الارتباط يعتمد على :

$$\frac{\sum(a + bx - y)^2}{\sum(y - \bar{y})^2}$$

حيث أن a و b توجد باستخدام معادلة المربعات الصغرى في البند ٩-٢ . وإذا كان التوفيق جيدا نجد أن هذه النسبة قريبة من الصفر لأن المقام سوف يكون صغيرا . وإذا كان التوفيق ضعيفا ، فالنسبة تكون قريبة من الواحد وذلك لأنه سيوجد انحراف حول أفضل خط مستقيم مساو تقريبا كما هو حول الخط المتوسط $y = \bar{y}$. ولاحظ أن هذه النسبة لا يمكن أن تزيد عن واحد ، وذلك لأنه إذا كان مجموع المربعات حول $y = \bar{y}$ أقل من مجموع المربعات حول $y = a + bx$ فإن المعادلة $y = a + bx$ لا يمكن أن تمثل أفضل خط مستقيم وعلى ذلك $y = \bar{y}$ يكون أفضل .



شكل ٩-٤

معامل الارتباط r معرف بالصورة .

$$r^2 = 1 - \frac{(a + bx - y)^2}{(y - \bar{y})^2}$$

وفي ضوء المناقشة السابقة نرى أنه لتوفيق جيد ، حيث تكون النسبة صغيرة فإن r^2 تكون قريبة من 1 بينما للتوفيق الضعيف ، حيث أن النسبة تقترب من 1 فإن r^2 سوف تكون قريبة من الصفر .

المقدار r^2 يعرف بمعامل التحديد .

وبالتعويض في تعريف r^2 بصورة a و b من انحدار المربعات الصغرى ، والقيام ببعض الحسابات ، فإننا نبرز الصورة العامة المستخدمة لحساب معامل الارتباط ، والتي هي :

$$r = \frac{\sum xy - (\sum x)(\sum y)/n}{\sqrt{[\sum x^2 - (\sum x)^2/n][\sum y^2 - (\sum y)^2/n]}}$$

إذا كان التوفيق جيدا وميل خط الانحدار الى أعلى ، فإن r تكون قريبة من +1

أما إذا كان التوفيق جيدا وميل خط الانحدار الى أسفل ، فإن r تكون قريبة من -1

إذا كان التوفيق ضعيفا ، فإن r تكون قريبة من الصفر .

هذه النتائج منسقة بالنسبة للنقط المذكورة سابقا بخصوص r^2 وموضحة في (i) ، (ii) و (iii) على التوالي في شكل

٩-٥ .

وعلى سبيل المثال لحساب معامل الارتباط اعتبر البيانات المعطاة في البند ٩-١ . رأينا في البند ٩-٢ ، أن

$$\sum xy = 2618 , \sum x^2 = 5442 , \sum y = 140 , \sum x = 218 , n = 10$$

بالإضافة الى هذا نحتاج الى

$$\sum y^2 = 20^2 + 14^2 + 12^2 + \dots + 11^2 = 2292$$

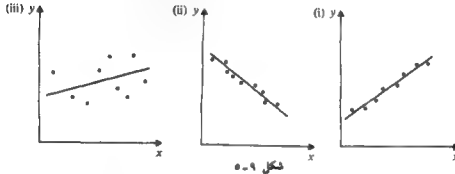
وبالتالى

$$r = \frac{2618 - 218 \times 140/10}{\sqrt{(5442 - 218^2/10)(2292 - 140^2/10)}} = \frac{-434}{\sqrt{689.7 \times 332}} = -0.907$$

وهذه القيمة قريبة من 1- وتدل على توافق جيد لخط مائل الى اسفل $y = 27.734 - 0.63x$ لنقط البيانات (مسألة الاختبار الاحصائى للقيمة ما إذا كانت قريبة من +1 أو -1 تؤجل للفصل السادس عشر).

وبعد أن حسبنا معامل الارتباط وقررنا ما إذا كانت قريبة من 1- أو +1 أو من الصفر تبقى مرحلة أخرى للاستكمال الداخلى . فلذا كانت r قريبة من الصفر هل ينتج أنه لا يوجد علاقة على الاطلاق بين المتغيرين ، أى بمعنى آخر هل هما غير معتمدين على بعض ؟

وإذا فرض توزيع معين (أى أن أزواج الملاحظات تتبع التوزيع الطبيعي الثنائى) فتكون هذه النتيجة صحيحة . وعلى أى الأحوال اذا أخذنا أى مجموعة أصلية من أزواج القيم وحسبنا معامل الارتباط ، فنتيجة استقلال المتغيرات ليست بالضرورة تتحقق . وذلك لأن ما يقيسه معامل الارتباط هو مقدار توافق أفضل خط مستقيم ممكن للبيانات . وحقيقة كون r يقترب من الصفر (أى أنه لا يوجد خط مستقيم مناسب جدا) فان ذلك لا يتحكم فى امكانية وجود علاقة من نوع آخر مناسبة جدا ، وبالتالي فان المتغيرات لا تكون مستقلة . وهناك امكانية موضحة فى الشكل ٩-٩ حيث أنه لا يوجد خط مستقيم له مجموع صغير لمربعات الانحرافات فى اتجاه y ولكن القطع المكافئ يوافق البيانات جيدا . والخط المستقيم الموضح هو أفضل ما يمكن ، ولكن مجموع المربعات حوله سوف يكون كبيرا .



شكل ٩-٩

ومن ناحية أخرى افترض أن r وجدت قريبة من +1 أو من 1- . فهل ينتج من هذا أن التغيرات فى المتغير المستقل x مسئولة عن التغيرات فى المتغير التابع y أى أنه هل يوجد سببية ما ؟

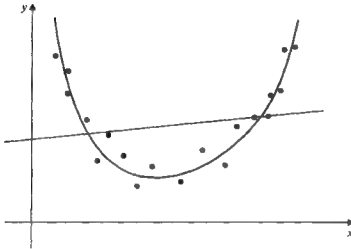
والاجابة على هذا أنه لا نحتاج لهذا الربط ولا نتعرض له فان الرابطة لا تكون الحاجة اليها (أولا تكون الحاجة اليها كلية) سببية ، وامتداد السببية تكون باختيار كل حالة على حدة . ففى المثال الذى كان يدرس فانه يبدو معقولا أن التغيرات فى أرقام المفردات للعناصر المتبعة هى المسئولة عن التغيرات فى تكلفة الوحدة . ومع ذلك افترض أنه كان يجب أن نحسب معامل الارتباط مستخدمين البيانات المعطاه على ا أسعار الطعام ، وأسعار البترول . والارتباط هنا يمكن أن يكون قريبا من 1 وحيث أن أسعار البترول تؤثر فى أسعار الطعام الى حد ما خلال تكلفة النقل ، والجزء الأساسى من العلاقة سوف لا يكون سببيا ولكنه سوف يعكس تضخما عاما فى مجموعة الأسعار .

تمرين ٩-٤-١ الأرقام التالية مأخوذة من اتجاومات اقتصادية توضح أرقام الفهرس السنوى لتسجيل سيارات جديده وأرقام لشراء سندات جديدة خلال الفترة الزمنية من ١٩٦٥ الى ١٩٧٤ .

	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
(x) سجلات سيارات جبهة (x)	93.5	88.1	93.1	93.1	82.3	91.4	108.5	138.6	137.1	102.8
(y) شراء سندات (y)	1590	1450	1556	1643	1587	1775	2053	2447	2871	2517

احسب معامل الارتباط بين x و y وهل اجابتك دلت على علاقة سببية ؟

(لاحظ أن حساب معامل الارتباط يمكن أن يكون سهلا وباستخدام المصطلحات الواردة في الفصل الثامن للمتوسط والانحراف المعياري



شكل ٦-٩

خذ

$$x' = \frac{x - p_1}{q_1}, \quad y' = \frac{y - p_2}{q_2}$$

لاى من p_1, q_1, p_2, q_2 واحسب الارتباط بين x' و y' وهكذا هو r المطلوب .

٩-٥ ارتباط الرتب

فى بعض الأحيان نحتاج الى قياس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرات باستخدام البيانات التى يمكن أن نثق بها الى حد رتبة ترتيبها . أى بمعنى آخر أنه اذا كانت قيمة احدى البيانات هى (مثلا) أكبر من أخرى فإنه الحقيقة يمكن أن تصلى ، ولكنه لا يمكن الاستفادة من بين الفرق فى قيمتى المتصدين . وهذه الحالة يمكن أن تظهر عن عدم الدقة فى القياسات ولكن الأكثر شيوعا فانها نتيجة لطبيعة المتغيرات المستخدمة . وذلك يحدث بصفة عامة فى حالة التسويق حيث أن موضوع المسح الاحصائى يكون معطى (مثلا) خمسة أنواع من الحلوى ومطلوب ترتيبها طبقا للأولوية . فى الحالة السابقة تكون البيانات الناتجة فى شكل ترتيبى ، ولكن فى الحالة الأخيرة أيضا البيانات يمكن أن تصلى الى حد تنظيم الرتب . فالفرق بين قبول حلوى حدد لها 8 درجات وحلوى حدد لها 6 درجات لا يمكن ان يكون لها معنى مقبولا مثل الفرق بين حلوى حدد لها 5 درجات وحلوى حدد لها 3 درجات .

وإذا كان لدينا بيانات من هذا النوع فقوة الارتباط الخطى يمكن أن تقلص عن طريق - إذا لزم - تحويل فئة الأشكال

الى فئتين من الرتب وبعد هذا - في الأساس - نحسب معامل الارتباط العادي باستخدام الرتب . والمعامل الناتج بهذه الطريقة يعرف بمعامل سيرمان لارتباط الرتب ويمرر له عموما بالحرف اليوناني ρ (رو) ولنعبر المثال التالي :
شركة لحماية المستهلك القومي فحصت سبع ماركات من البوية لتحديد نوعيتها بالنسبة للسعر . ونتائج الشركة رتب كما يلي :

ماركة	السعر لكل متر Z	نوع الرتبة
T	1.92	2
U	1.58	6
V	1.35	7
W	1.60	4
X	2.05	3
Y	1.39	5
Z	1.77	1

(البيانات مأخوذة من م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر 1997)

باستخدام معامل سيرمان للرتب أوجد ما إذا كان المستهلك عموما حصل على قيمة ملائمة .
الأرقام النوعية ما هي الارب . ولكي نحسب معامل سيرمان لابد أولا أن نحول الأرقام الى رتب . وسوف نفعل هذا باعطاء أكثر ماركة مكلفة الرتبة 1 ورتبة 2 للماركة التي تليها وهكذا .
وهذا يؤدي الى الترتيبات التالية :

ماركة	T	U	V	W	X	Y	Z
سعر الرتبة	2	5	7	4	1	6	3
نوع الرتبة	2	6	7	4	3	5	1

وإذا كان معامل الارتباط حسب استخدام هذه الرتب ، فالقيمة الناتجة ستكون مادية 0.82 . والقارىء يمكن أن يتأكد من هذه النتيجة .

وحيث أن ، هذه ليست الطريقة المعتادة لحساب معامل ارتباط الرتبة . وذلك أن قيم x هي الأعداد من 1 الى n في ترتيب ما (عموما تكون مختلفة) والمعادلة لمعامل الارتباط ρ يمكن أن تبسط بمعالجات جبرية الى الشكل التالي :

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث أن الرمز d يدل على الفرق بين كل زوجين متناظرين من الرتب . وهذه هي الصيغة المستعملة لحساب معامل سيرمان .

وبالرجوع الى المثال السابق نكتب :

ماركة	T	U	V	W	X	Y	Z
$d = x - y$	0	-1	0	0	-2	1	2
d^2	0	1	0	0	4	1	4

$$\sum d^2 = 0 + 1 + 0 + 0 + 4 + 1 + 4 = 10$$

إذا

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 10}{7 \times 48} = 1 - \frac{5}{28} = 0.8$$

بما أن معامل سيرمان يحسب على نفس القواعد مثل معامل الارتباط العادي، بمجرد معالجة البيانات بطريقة مناسبة بالضبط لنفس النقط المستعملة لدراستها، كما استعملت في معامل الارتباط العادي. وبالأخص في هذا المثال عندنا قيمة معامل الارتباط قريبة من (+1) موضحة ارتباطاً خطياً قوياً إلى أعلى بين رتبة السرور ورتبة النوع، وهذا في الحقيقة لا يدل على أن المستهلك عموماً قد حصل على قيمة مقابل مادفعه من نقود.

وفي المثال السابق عندما رتبنا الأسعار لكل ماركة أخذت رتب مختلفة، وذلك لأن كل الأسعار كانت مختلفة وهذا لا يحدث إذا كانت (مثلاً) الماركة U التي سعرها 2 بنس لكل لتر أكثر تكلفة، أو الماركة Y التي سعرها 4 بنس لكل لتر أقل تكلفة. ففي هذه الحالات لا بد أن نجد ارتباطاً بين الرتب. والوسيلة المستخدمة هي إذا كان يوجد ارتباط، فإنه يعطى كل قيمة من القيم المرتبطة متوسط الرتب التي كان سوف يأخذها، إذا كانت مختلفة وبعد ذلك نستمر بالمعتاد لحساب الفروق d 's وبالتالي ρ .

مثال ٩-٥-١ شركة تهتم بوضع طريقة لاختيار المتقدمين لمراكز وظيفية بدلاً من طريقة المواجهة. وللمساعدة في البحث عن قرار للاختيار فإن ثمانية من المتقدمين سوف يتعرضون إلى الطريقتين وكانت النتائج التي تم الحصول عليها كما يلي:

المتقدم	A	B	C	D	E	F	G	H
الرتبة في الامتحان	1	2	3	4=	4=	6	7	8
الرتبة في المواجهة	2	1	3	4	5	6	7	8

احسب معامل سيرمان لربط الرتب بين نتائج الطريقتين، وعلق على الإجابة.

الإجابة إذا كانت D و E منفصلتين فيجب أن تكون لهما الرتب 4 و 5 في طريقة الاختبار، ولكن في هذه الحالة لا بد أن كليهما يأخذ الرتبة $4.5 = (4+5)/2$ وبالتالي حساب معامل سيرمان هو كما يلي:

المتقدم	A	B	C	D	E	F	G	H
رتبة الامتحان	1	2	3	4.5	4.5	6	7	8
رتبة المواجهة	2	1	3	4	5	6	7	8
d	-1	1	0	0.5	0.5	0	0	0
d^2	1	1	0	0.25	0.25	0	0	0

$$d^2 = 2.5$$

وبالتالي:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n - 1)} = 1 - \frac{6 \times 2.5}{8 \times 63} = 0.97$$

وهذه القيمة قريبة جدا من 1 ، موضحة رابطة خطية قوية بين نتائج الطريقتين ، ويتضح أن تغير استعمال طريقة الاختبار سوف لا تؤدي إلى انحراف معنوي عن الاختيارات التي كانت سوف تتج من استخدام طريقة المواجهة .

تعرين ٩-٥-١ البيانات التالية توضح ترتيب 10 مصانع منتجة للبوكسايت في ترتيب تنازلي للشعور بالأمان ، مع عدد الحوادث لكل ألف موظف على مدى السنوات الأخيرة .

المصنع	رتبة الشعور بالأمان	عدد الحوادث لكل 1000 موظف
A	1	1.2
B	2	5.3
C	3	8.3
D	4	13.1
E	5	18.2
F	6	15.9
G	7	10.4
H	8	3.3
I	9	23.2
J	10	19.7

المطلوب :

- (١) توضع البيانات في شكل بياني علق على ما اذا كانت حدوث حادثة مرتبطة بالشعور بالأمان .
 - (٢) احسب معامل سبيرمان للرتب وفسر النتيجة .
 - (٣) افترض الآن أنه معروف أن المصنع H ليس بالتحديد أكثر حادثة من المصانع الأخرى فيدون اجراء الحسابات اشرح ماهي التعديلات التي يمكن أن تتم في (٢) ، السابقة وبأى طريقة سوف تتأثر النتيجة .
- (ج م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٥)

تعاوين

٩-١ البيانات التالية قد تم جمعها خلال ثمانى فترات

الفترة	وحدات الانتاج	التكلفة الكلية £
1	10 000	32 000
2	20 000	39 000
3	40 000	58 000
4	25 000	44 000
5	30 000	52 000
6	40 000	61 000
7	50 000	70 000
8	45 000	64 000

ارسم الشكل الانتشاري ، وبطريقة المربعات الصغرى ارسم احسن خط مستقيم يوافق البيانات .
أوجد معادلة الخط ، وقدر السعر المتوقع في مستويات الانتاج 26 000 وحدة و 47 750 وحدة .

(ج م م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

٩-٢ الزمن اللازم لانتاج مجموعات من عنصر ما ، وجد أنه مرتبطا بعدد العناصر في كل مجموعة . والسجلات توضح أن زمن الانتاج لست مجموعات هي كما يلي :

حجم المجموعة	زمن الانتاج (بالساعة)
50	4.0
90	5.8
150	6.8
250	7.6
280	7.6
350	8.6

وقد اقترح بدليان لتقدير الانتاج t من حجم المجموعة r .

$$t = 3.5 + r/50 \quad (i)$$

$$t = 2 + \sqrt{r/8} \quad (ii)$$

(١) لكل من العلاقتين أوجد قيم t المناظرة الى $r=72,128,200,288$

(٢) استخدم القيم الناتجة من الجزء (١) لرسم شكل بياني يوضح العلاقتين البدليتين . ومن ملاحظة رسمك البياني اذكر أيهما يمثل أفضل البيانات في الجدول المعطى .

(٣) أوجد أفضل منحنى على الصورة $t = a + b\sqrt{r}$ يوافق البيانات مستخدما انحدار المربعات الصغرى للمتغير t على \sqrt{r} (حجم م الأساس بـ - يونيو ١٩٧٧)

٩-٣ (أ) اشرح الفرض من حساب معامل الارتباط ، وأعط المدى الممكن للقيم التي يمكن أن يأخذها .

(ب) افترض أنه وجد باستخدام اختبار احصائي ما ، أن مقدار معامل ارتباط محسوب هو $+0.6$ بين متغيرين ،

وأنه لا يختلف معنويا عن 0 . ما معنى هذا ؟

(ج) الجدول التالي يعطى الناتج الشهري x وتكلفة العمالة y لمصنع ما .

الناتج الشهري (tons $\times 10^3$)	تكلفة العمالة (£ $\times 10^3$)
66	50
74	53
78	59
70	52
81	64
90	85
87	77
85	68

المطلوب :

احسب معامل الارتباط وعلق على نتيجتك . كيف تتأثر اجابتك اذا كان الناتج قد قيس بـ tonne بدلاً من ton حيث أن $1 \text{ ton} = 1.016 \text{ tonne}$ ؟

(حجم م - الأساس بـ - يونيو ١٩٧٨)

٩-٤ عشر محطات بترول $A - J$ تقع في مناطق لها نفس كثافة المرور ورتبت أولا حسب نوعية الخدمة ، ثانيا حسب

حجم المساحة الأمامية ، وثالثا حسب سعر البترول المباع . الرتبة 1 تدل على خدمة ممتازة وأكبر مساحة أمامية ، وأقل سعر . والنتائج بما فيها معدل البيع الأسبوعي للبترول معطاه في الجدول التالي

المحطة	نوع الخدمة	حجم المساحة الأمامية	سعر البترول	مبيعات (بمئات الجالونات)
A	3	8	2	47
B	7	4	9	20
C	4	10	8	23
D	8	2	1	36
E	2	1	4	36
F	5	3	5	31
G	10	9	7	33
H	9	6	10	28
I	1	4	3	42
J	6	7	6	24

المطلوب :

- (١) اجر بعض الحسابات لمعرفة ما اذا كان سعر البترول أو نوعية الخدمة محتملا أن تكون عاملا مهما في إيجاد حجم البترول المباع ، أولا يظهر أنه عامل مهم .
- (٢) هل يوجد أى دليل على أن نقترح بأن تلك المحطات ذات المساحة الأمامية الكبيرة تعطى خدمة أفضل ؟
- (٣) لاي سبب نظن أن التحليل السابق قد احتوى على محطات لها كثافة مرور متشابهة ؟

(حـمـم - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٧)

الفصل العاشر

السلاسل الزمنية

١٠-١ السلاسل الزمنية ومكوناتها

كما ذكرنا في الفصل السابع ، فإن السلسلة الزمنية عبارة عن مجموعة من القيم لمتغير ما وإرادة حسب ترتيب وقوعها في لحظات زمنية . وفي العادة ، فإن اللحظات الزمنية تكون على فترات متساوية ، وهذا هو النوع الذي سندرسه هنا . ومن الأمثلة المعروفة للسلاسل الزمنية الأرقام الشهرية للتجارة ، وأرقام البطالة الشهرية ، والرياح السنوية لشركة ما .

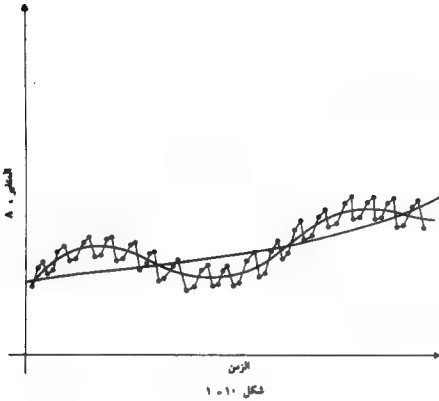
وقد رأينا في الفصل السابع كيف يمكن تمثيل سلسلة زمنية على رسم بياني بسيط بتوقيع الزمن على المحور الأفقي ، والمتغير الذي يهمنا على المحور الرأسي ثم توصيل النقاط الناتجة وبين شكل (١٠ - ١) رسما بيانيا عاما من هذا النوع يمثل بيانات تصدر كل ثلاثة أشهر مرسومة لعدة أعوام . والغرض من هذا الرسم توضيح الأنواع المختلفة من التغير التي يمكن أن توجد في السلاسل الزمنية .

وبين الخط المستقيم تقريبا الذي يمر عند وسط الرسم البياني الاتجاه العام لحركة قيم المتغير مع الزمن ، وفي المثال المعطى هناك اتجاه عام لل صعود ويمكن تسمية هذا النوع من التغير « بالاتجاه » (وأحيانا يسمى « بالاتجاه في الأمد الجيد ») ويحتفظ « الاتجاه » بثبات خطه العام لمدة طويلة .

أما الخط المنحني الذي يصعد ويهبط في هدوء حول خط الاتجاه فيمثل « التغير الدوري » في السلسلة الزمنية . وهذا التغير يحدث دوريا في قيم المتغير ، ويمكن تقدير فترة الدورة بعدة سنوات . كما أن مدى التغير الدوري قد يختلف من مكان لآخر في السلسلة الزمنية . وهذا النوع من التغير هو الذي تصادفه في دورات الاقتصاد التي يتناوب فيها الانتعاش والكساد .

أما التغير الذي تمثله الخطوط التي تصل النقاط الموقعة فهو « التغير الموسمي » في السلسلة الزمنية ، أي التغير من أحد فصول السنة إلى الآخر . وفي العادة ، فإن التغير الموسمي منتظم في فترته وفي مداه ، وسنرى فيما بعد كيف يمكن الاستفادة من هذا الانتظام لتحليل هذا التغير . وفي المثال المعطى لدينا قيم أعلى في الربيعين الثاني والثالث من السنة ($Q2$ و $Q3$) مما يوجد في الربيعين الأول والرابع ($Q1$ و $Q4$) وهكذا فإن الرسم البياني المعطى يمكن أن يمثل مبيعات الأيس كريم ، أو إحصائيات عن السياحة . ويمكن أن تتوقع صورة عكسية للتغير الموسمي لأرقام البطالة مثلا .

وهناك نوع رابع من التغير لا يمكن توضيحه جيدا على الرسم البياني ، وهو ما نسميه « بالتغير المتقي » . وهذا التغير كما يدل الاسم هو التغير الذي يبقى في البيانات المبحوثة بعد استبعاد الاتجاه والتغيرات الدورية والموسمية . ويتج التغير المتقي أما عن حوادث عشوائية لا تتكرر مثل اضطراب العمال ، أو الكوارث الطبيعية ، وأما عن أخطاء التدوين العادية التي تحدث عند جمع البيانات .



١٠-٢ تقدير المركبات

بعد أن عرفنا المركبات الأربعة للسلاسل الزمنية سنتناول طريقة تحليل السلاسل الزمنية إلى مركباتها . وهناك سببان أساسيان للقيام بهذا العمل . أولاً لأن هذا يمكننا من استبعاد الأثر الموسمي من البيانات الماضية ، ويسمى هذا بالتصحيح الموسمي . ويجري هذا على سبيل المثال لأرقام البطالة والتجارة التي تنشر في صورتها الخام ، وبعد تصحيحها موسمياً . والسبب الثاني هو أن هذا التحليل يمكننا من التنبؤ بالقيم المستقبلية باستكمال أو مد الاتجاه إلى الزمن المستقبلي ، ثم إجراء التصحيحات المناسبة .

(أ) نماذج السلاسل الزمنية

لكي نستطيع إجراء تحليل السلاسل الزمنية إلى مركباتها يجب أن يكون لدينا نموذج بهذا وهذا يعني أن نحدد كيف تتجمع المكونات معاً لتعطينا القيم المقاسة للسلسلة الزمنية .

والرموز القياسية المستخدمة هي أن يرمز للقيم المقاسة بالرمز A ، وأن يرمز للاتجاه بالرمز T وللتغيرات الدورية بالرمز C وللتغيرات الموسمية بالرمز S وللتغير المتبقي بالرمز R .

وهناك نموذجان شائعا الاستخدام . والنموذج الأول هو نموذج الجمع ، وفيه يفترض أن القيمة المقاسة A هي عبارة عن مجموع المكونات ، أي أن

$$A = T + C + S + R$$

والتوزيع الثاني هو نموذج الضرب ، وفيه يعتبر أن القيمة المقاسة تساوى حاصل ضرب المكونات أى أن

$$A = T \times C \times S \times R$$

ونموذج الجمع هو النموذج الأسهل فى اجراء الحسابات ، وهو النوع الذى يستخدم فى الأجابة على أسئلة الامتحان المتعلقة بالسلاسل الزمنية ، ونستخدم هذا النموذج لحل مثال عددي فى هذا الفصل .

ونموذج الجمع عيه أنه يفترض أن مدى الأنواع المختلفة من التغير لا يتوقف على الأنواع الأخرى . وعلى سبيل المثال ، فإن هذا النموذج يفترض أن نفس الكمية الموسمية تضاف فى نفس الوقت من كل عام . ولكن عندما تكون السلسلة الزمنية طويلة الى حدا ما ، وبها اتجاه شديد الانحدار ، أو أثر دورى واضح ، فاننا نلاحظ أن التغيرات الموسمية يزداد مداها عندما يكون الاتجاه أكبر أو عندما تكون عند قمة الدورة عن مداها عند اتجاه منخفض ، أو عند قاع الدورة . ويأخذ نموذج الضرب هذه الظواهر فى الاعتبار بصورة أفضل حيث أنه يقوم بضرب عامل موسمي ثابت فى نفس الوقت من كل عام . فإذا كان الاتجاه والدورة يقيم صغيرة ، فإن النتيجة تكون صغيرة . ومع أن النموذج الذى سندرسه هنا هو نموذج الجمع إلا أن الفأريه لن يجد صعوبة فى تطبيق نفس الفكرة على نموذج الضرب . وكل المطلوب عندئذ هو استبدال عمليات الطرح بعمليات قسمة ، واستبدال عمليات الجمع بعمليات ضرب .

وعلى أية حال فإن نموذج الجمع سيكون كافيا للحالات التى ستناولها لأن السلاسل الزمنية المأخوذة فى الاعتبار قصيرة (وبالتالى لا يوجد بها أثر دورى واضح) وكل ما بها اتجاه تدريجى . وهكذا فإن النموذج الذى سنركز عليه انتباهنا هنا هو نموذج الجمع المختصر .

$$A = T + S + R$$

(ب) طريقة التحليل

أول خطوة تجرى لتحليل سلسلة زمنية هى إيجاد الاتجاه T . وهناك عدة طرق لها درجات مختلفة من التعقيد لاجراء هذه العملية . وهناك طريقتان تقريبيتان جدا تستخدمان أحيانا . والأولى تجرى بتوقيع النقاط على الرسم البياني ، ثم رسم أفضل خط مستقيم يمر بينها بالنظر . والثانية هى طريقة أنصاف المتوسطات . وفيها نوجد متوسط النصف الأول من البيانات ونوقعه مقابل منتصف الفترة الزمنية التى يتنى إليها ، ثم نوجد متوسط النصف الثانى من البيانات ونوقعه بنفس الطريقة ثم نوصل النقطتين بمستقيم نعتبره اتجاه السلسلة . ولكن الطرق الأساسية التى تستخدم عادة - وهى التى سنستخدمها لحل الأمثلة الواردة هنا - هى طريقة الانحدار ، وهى مشروحة بالفصل التاسع وطريقة المتوسطات المتحركة وسنشرحها فيما يلى :

ويعد إيجاد الاتجاه T يمكن اجراء الخطوة التالية فى التحليل بالرجوع الى النموذج $A = T + S + R$

ولماذا كانت القيم A معلومة باعتبارها هى البيانات الأصلية ، وكذلك قيمة T التى أوجدناها للتو يمكن طرح القيم المعلومة لـ T من القيم المعلومة لـ A للحصول على قيم $S+R$ حيث أن

$$A - T = S + R$$

والخطوة الثالثة هى إيجاد متوسط قيم $S+R$ عند الفترات الزمنية المختلفة . فإذا كانت البيانات المدروسة شهرياً ، فاننا نوجد متوسط قيم $S+R$ لكل أشهر يناير ثم نوجد المتوسط لكل أشهر فبراير ، ولكل أشهر مارس ، وهكذا . والفكرة وراء ذلك هى أن التغير المتبقى R عشوائى ، ولذلك فإنه يأخذ المتوسطات بهذه الطريقة نأمل فى استبعاد الظواهر العشوائية بحيث تبقى لدينا التغيرات الموسمية S لأوقات السنة المختلفة . والنسبة للبيانات الشهرية المذكورة أعلاه ، فاننا نعتبر أنه بعد أخذ المتوسطات سيكون لدينا الآثار الموسمية لأشهر يناير وفبراير ومارس ... الخ من أشهر السنة . ويستعمل كل

من الوسيط والوسيط لهذا الغرض . وكون الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة يجعله مرغوبا فيه في هذه الحالة لأنه لو فرض وجود اضطراب كبير في أحد شهور فبراير مثلا ، فمن الأفضل استبعاد ذلك الشهر عند إيجاد متوسط $S+R$ لشهر فبراير . وهذا هو ما يقوم به الوسيط في حين أن الوسط كان سيتقبل أثر الاضطراب إلى كل الحدود الداخلة في الحسابات . وتتوقف الخطوة الرابعة في التحليل على الهدف منه . فإذا كان التغير المتبقي R في فترة زمنية معينة يهمنا ، فإننا نستطيع إيجاده بعملية طرح اضافية .

$$A - T - S = R$$

أما إذا كان الغرض من التحليل إجراء التصحيح الموسمي لبيانات سابقة ، فإننا نطرح القيم المناسبة لـ S من قيم A الأصلية لنحصل على السلسلة الزمنية المصححة موسميا :

$$A - S$$

وإذا كان الغرض هو التنبؤ بقيم مستقبلية ، فإن الخطوة الرابعة عندئذ ستضمن استكمال الاتجاه في المستقبل ، ثم إضافة الحد الموسمي المناسب ، أي أن القيم المستقبلية للمتغير توجد طبقا للمعادلة

$$A = T + S$$

ولا يؤخذ التغير المتبقي في الاعتبار عند التنبؤ لأنه بطبيعته لا يمكن التنبؤ به .

وسنرى فيما يلي أمثلة للتصحيح الموسمي والتنبؤ .

(ج) آلية التحليل

سنحل هنا مثالا تقليديا للتصحيح الموسمي لتوضيح طريقة التحليل بالتفصيل . وسنستخدم طريقة المتوسطات المتحركة لإيجاد الاتجاه ثم سنستخدم الوسيط لقيم $S+R$ وسيساعدنا المثال على فهم طريقة المتوسطات المتحركة كما سنقوم بمقارنة للاتحادار ولطريقة المتوسطات المتحركة لإيجاد الاتجاه .

مثال ١٠-٢-١ البيانات التالية تمثل اعداد الوحدات المباعة حسب بيانات إدارة المبيعات

الربع	1	2	3	4
السنة				
1973	100	125	127	102
1974	104	128	130	107
1975	110	131	133	107
1976	109	132		

والمطلوب :

- حساب متوسط متحرك لاربعة أرباع السنة للسلسلة .
- حساب المبيعات بعد تصحيحها موسميا .
- رسم المبيعات الفعلية والمصححة موسميا على رسم بياني واحد .
- التعليق على النتائج .

الاجابة يبين شكل (١٠ - ٢) الحسابات المجراه لحل الجزمين (أ) و(ب) وهي مرتبة في الصورة المعتادة لحل الأمثلة من هذا النوع . وستوضح فيما يلي خطوات الحل . والفكرة في استخدام متوسط متحرك لكل أربعة أرباع في الجزء (أ) هو أخذ متوسط لعام كامل ، أي مجموعة متكاملة من الفصول . وإذا كانت البيانات المعطاه بيانات شهرية ، فإن المتوسط المتحرك المناسب لهذه الحالة يكون المتوسط المتحرك لاثني عشر شهراً . ومثل هذا المتوسط لا يتضمن أثراً موسمياً .

ويعنى أخذ متوسط متحرك لأربعة أرباع أن نحسب متوسط لكل مجموعة من أربعة قيم متتالية بالبيانات . ويتضمن العمود المعنون A بشكل (١٠ - ٢) أرقام المبيعات المعطاه . وبالعمود التالي المعنون « مجموع أربعة أرباع » أول خطوة لحساب المتوسط المتحرك لأربعة أرباع . وبهذا العمود مجموع كل أربعة أرقام متتالية . وعلى سبيل المثال ، فإن الأرقام الأربعة الأولى وهي Q1 الى Q4 لعام 1973 . مجموعها 454 . والمجموعة الثانية من أربعة أرقام وهي من Q2 لعام 1973 الى Q1 لعام 1974 مجموعها 458 وهكذا . وهذه الأرقام مكتوبة عند النقط المتوسطة للفترات الزمنية التي تنتمي إليها . وفي هذه الحالة ، وحيث أن العام مقسم إلى عدد زوجي من الفترات فإن المجموع مكتوب عند منتصف المسافة بين نقطتين زمنيتين . ولذلك فإننا لا نستطيع ببساطة إيجاد المتوسط بالقسمة على 4 لأننا نحتاج لقيم T عند نفس النقط الزمنية التي توجد عندها قيم A . وفي مثل هذه الحالات التي يكون فيها عدد النقاط في العام زوجياً نقوم بحساب مجموع متحرك لخطوتين وذلك بجمع كل زوج من القيم المتتالية بعمود المجموع المتحرك الأول . وبذلك نحصل على عمود جديد عنوانه « مجموع خطوتين » . والقيم الواردة بهذا العمود منطبقة على النقط الزمنية المطلوبة ، ويمكن حساب قيم T بقسمة كل من قيم المجموع على عدد أرقام البيانات المستخدمة للحصول عليه ، وهو في هذه الحالة 8 . ولو كانت البيانات شهرية لاحتجنا للقسمة على 24 .

		A	مجموعة أربعة أرباع	مجموع خطوتين	(a) T	A - T = S + R	(b) A - S
1973	Q1	100					111
	Q2	125					114
	Q3	127	454	912	114	13	114
	Q4	102	458	919	114.875	-12.875	115
1974	Q1	104	461	925	115.625	-11.625	115
	Q2	128	464	933	116.625	11.375	117
	Q3	130	469	944	118	12	117
	Q4	107	475	953	119.125	-12.125	120
1975	Q1	110	478	959	119.875	-9.275	121
	Q2	131	481	962	120.250	10.75	120
	Q3	133	481	961	120.125	12.875	120
	Q4	107	480	961	120.125	-13.125	120
1976	Q1	109	481				120
	Q2	132					121

	1973	1974	1975	الوسيط	S الصحيحة	S المنقورة
Q1	-	-11.625	-9.875	-10.750	-10.828	-11
Q2	-	11.375	10.759	11.063	10.985	11
Q3	13	12	12.875	12.875	12.797	13
Q4	-12.875	-12.125	-13.125	-12.875	-12.953	-13
				0.313		
				0.313 ÷ 4 = 0.07825		

وهكذا نرى أن طريقة المتوسطات المتحركة سهلة جدا في التنفيذ ، وهي الطريقة القياسية التي تستخدم لحل المسائل من هذا النوع . ويمكننا مع ذلك أن نلاحظ بعض المشاكل التي ظهرت عند استخدامها ، والتي لم تكن تظهر عند استخدام طريقة الانحدار الأكثر تعقيدا . ونلاحظ أولا أننا لا نحصل على قيم للاتجاه T لكل النقط الزمنية . فليس لدينا قيم لـ T للأربع $Q1$ ، $Q2$ من عام 1973 ولا للأربع $Q1$ و $Q2$ من عام 1976 وهذا يعني نقص المعلومات التي يمكن أن نبني عليها حسابات لمتوسطات $S+R$ في المرحلة التالية . وثانيا نلاحظ أننا لا نحصل على معادلة للاتجاه ليس مهما جدا في مسألة تصحيح موسمي من هذا النوع ، ولكنه يجعل الأمور أصعب لو كان المطلوب استكمال الاتجاه في المستقبل لأغراض التنبؤ . وكما سترى في الجزء (١٠ - ٣) فإننا قد انتهينا إلى تقريب خطي غير نقي أو إلى أسلوب بياني :

وبعد إيجاد قيم T فإن الخطوة التالية هي طرح هذه القيم من قيم A عند كل نقطة زمنية يمكن عندها إجراء هذا الطرح . وتكون النتيجة هي المجموعة من القيم المبنية بالعمود المعلنون " $A - T = S+R$ " .

ولإيجاد متوسطات قيم $S+R$ تعاد كتابة تلك القيم في جدول ثان ، كما هو مبين في الجزء السفلي من شكل (١٠ - ٢) . وفي هذا الجزء رقت الأعمدة بأرقام الأعمام ورقمت الصفوف طبقا « للفصول » ، أي أن المتوسطات المطلوبة تؤخذ على الصفوف . وقد أخذنا في المثال الوسيط للقيم الواردة والنتائج مطعاه في العمود المعلنون « الوسيط » ولابد أولا من إجراء تصحيح صغير للوصول إلى قيم S . ولما كانت التغيرات الموسمية حسب التعريف هي اختلاف من أحد فصول السنة إلى فصل آخر فإنه لا يوجد تأثير موسمي على مدى كل الفصول مجمعة . وبالنسبة لنموذج الجمع ، فإن هذا يعني أن مجموع التأثيرات الموسمية يساوي صفرا . فإذا وجدنا كما في هذه الحالة أن مجموع المتوسطات لا يساوي صفرا فإنه يجب إجراء تصحيح لجعله صفرا ، وذلك بطرح متوسط المتوسطات وهذا يعطينا العمود المعلنون S « المصححة » . وقد أجريت الحسابات في هذا المثال لثلاثة أرقام عشرية ، ويجب إجراء الحسابات بدقة معقولة في هذه المرحلة حتى لا تؤدي إلى أخطاء في النتيجة النهائية . ومع ذلك فعند إعطاء النتيجة النهائية وهي الأرقام المصححة موسميا لا يوجد ميرر لذكر أرقام عشرية بدقة أكبر من دقة الأرقام الأصلية . ولذلك فقد تم « تدوير » - تقريب - هذه الأرقام في العمود المعلنون " S المدورة" - المقربة - ثم طرحت هذه الأرقام المدورة من قيم A الأصلية لتعطي العمود المعلنون " $A - S$ " في الجدول العلوي من شكل (١٠ - ٢) وهذه هي القيم المصححة موسميا المطلوبة بالجزء (ب) من السؤال .

وبين الشكل (١٠ - ٣) الرسم البياني المطلوب طبقا للجزء (ج) من السؤال . وتظهر بالبيانات الأصلية تغيرات موسمية كبيرة منتظمة قيمها أكبر في الربعين الثاني والثالث $Q2$ و $Q3$ منها في الربعين الأول والرابع $Q4$ و $Q1$. وكما توقعنا ، فإن الرسم البياني للقيم المصححة موسميا العار بمنتصف الشكل أكثر انتظاما . ويعكس الرسمان اتجاههما صاعدا برفق في البيانات .

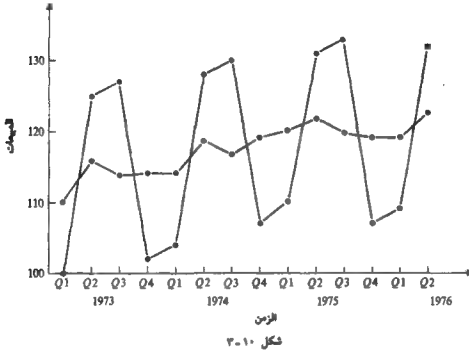
ولنعتبر الآن المثال التالي الذي يستخدم طريقة المتوسطات المتحركة ، ولكنه يستخدم الوسط ، وليس الوسيط لقيم $S+R$.

مثال ١٠-٢-٢ احسب للبيانات التالية : الاتجاه والتغيرات الموسمية (أو اليومية) المتوسطة والمتبقي .

وتمثل البيانات ميقات أحد المتاجر بالنقد ، وهذا المتجر يغلط أيام الاثنين

الأسبوع رقم	1 £	2 £	3 £	4 £
اليوم				
الثلاثاء	360	350	380	390
الأربعاء	400	430	440	450
الخميس	480	490	490	500
الجمعة	600	580	590	600
السبت	660	680	690	690

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٩)



الاجابة : المطلوب إيجاد في هذه الحالة هو التغير المتبقى عند النقط الزمنية المختلفة .

كما أن هذا المثال يبين أن الأفكار المطبقة سابقا على سنة مقسمة الى أرباع أو شهور يمكن أن تطبق كذلك على البيانات الأسبوعية المقسمة الى أيام ولما كان التقسيم الى عدد فردي من الأيام ، فإن ارقام المجموع المتحرك الأول تقع عند النقط الزمنية ، ولا حاجة الى المجموع المتحرك ذي الخطوتين يجعلها تنطبق على تلك النقط .

وبين الشكل (٤ - ١٠) حل هذا المثال في الصورة القياسية . وبالمعمود A قيم البيانات الأصلية . وبحسب المجموع المتحرك لخمس أيام من هذه القيم . ثم تقسم قيم المجموع المتحرك على S لتعطي الاتجاه T ثم تطرح قيم T من قيم A المقابلة لتعطي قيم $S+R$ ثم توجد بعد ذلك متوسطات هذه القيم على أيام الأسبوع المختلفة في الجدول السفلي بشكل (٤ - ١٠) ثم تصحح وتدور لتعطي التغير الموسمي (من يوم ليوم) . وبعد ذلك يوجد التغير المتبقى في المعمود الأخير من الجدول العلوي يطرح قيم S من قيم $A - T$.

تبرين ١٠-٧-١ : بين الجدول التالي مبيعات إحدى الشركات كل ثلاثة شهور بآلاف الأطنان لمدة ٤ سنوات

المبيعات	الربع			
	1	2	3	4
العام الأول	70	41	52	83
العام الثاني	78	44	48	85
العام الثالث	83	54	51	96
العام الرابع	85	49	54	89

A			الاتجاه المتوسط T	$A - T = S + R$	التغير المتبقي $A - T - S$
الأسبوع الأول					
الثلاثاء	360				
الأربعاء	400				
الخميس	480	2500	500	-20	4
الجمعة	600	2490	498	102	24
السبت	660	2520	504	156	-5
الأسبوع الثاني					
الثلاثاء	350	2500	500	-150	-9
الأربعاء	430	2480	496	-66	8
الخميس	490	2500	500	-10	14
الجمعة	580	2530	506	74	-4
السبت	680	2540	508	172	11
الأسبوع الثالث					
الثلاثاء	380	2540	508	-128	13
الأربعاء	440	2550	510	-70	4
الخميس	490	2560	512	-22	2
الجمعة	590	2570	514	76	-2
السبت	690	2580	516	174	13
الأسبوع الرابع					
الثلاثاء	390	2590	518	-128	13
الأربعاء	450	2600	520	-70	4
الخميس	500	2600	520	-20	4
الجمعة	600				
السبت	690				

	1	2	3	4	المتوسط	S
الثلاثاء	-	-150	-128	-128	-135.33	-141
الأربعاء	-	-66	-70	-70	-68.67	-74
الخميس	-20	-10	-22	-20	-18	-24
الجمعة	102	74	76	-	84	78
السبت	156	172	174	-	167.33	161
$29.33 \div 5 = 5.87$						

شكل ١٠-٤

والمطلوب استخدام هذه المعلومات :

(١) لرسم المبيعات كل ثلاثة أشهر على رسم بياني .

(٢) لاستنباط ورسم الاتجاه المتوسط المتحرك .

(٣) لحساب السلسلة المصححة موسمياً باستخدام الوسيط لقيم $S+R$

(ممت أ- الجزء الأول- مايو ١٩٧٤)

تعرين ١٠-٢-٢ : فيما يلي مبيعات إحدى السلع لكل فترة ثلاثة أشهر في الأعوام الثلاثة الماضية . ولهذه السلعة طابع موسمي واضح :

	الربع			
	1	2	3	4
1975	325	382	350	363
1976	393	452	430	421
1977	471	530	500	510

والمطلوب :

- (١) استخدام طريقة المتوسطات المتحركة لإيجاد الاتجاه .
 (٢) تفكر الشركة في استخدام القاعدة البسيطة التالية في المستقبل لاكتشاف ما إذا كان اتجاه المبيعات للزيادة ، أو النقصان .

إذا كانت المبيعات في الربع الثاني هي s_2 وفي الربع الرابع s_4 فإن المبيعات تنبج الى النقص اذا كان الفرق $s_4 - s_2$ أكبر من مقدار ما d .

احسب أى القيم التالية للمقدار d هي الأنسب .

-100, -70, -40, -10, 0, 10, 40, 70, 100

(استخدام متوسطات قيم $S+R$)

(ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٨)

١٠-٣ التنبؤ

التحليل الأساسى للسلسلة الزمنية

$$A = T + S + R$$

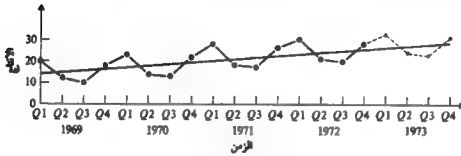
يقطى فى هذه الحالة ، كما كان فى الجزء ١٠-٢ . وكل الفرق هو أننا الآن نريد استخدام نتائج التحليل للتنبؤ بقيم المتغير A فى المستقبل .

وعندما يكون مطلوباً استخدام التحليل لهذا الغرض ، فمن المفيد أن نستخدم الانحدار لإيجاد الاتجاه لأن هذه الطريقة تعطى معادلة يمكن استكمالها لتعطي القيم المستقبلية للاتجاه . وهكذا فإن المثال الأول الذى ستناوله فى هذا الجزء يستخدم طريقة الانحدار كما هى مشروحة بالجزء (٩-٢) لإيجاد الاتجاه . كما أنه يستخدم الوسيط لقيم $S+R$ لحساب التأثيرات الموسمية .

فيما يلي أرقام الانتاج ربع السنوى لشركة ما فى الفترة من عام 1969 الى عام 1972 وسيتم توفير اتجاه على شكل مستقيم لهذه البيانات باستخدام الانحدار ، ثم استخدام نموذج الجمع للسلسلة الزمنية للتنبؤ بالانتاج فى الأرباع الأربعة لعام 1973 .

1969				1970				1971				1972			
Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
20	12	10	18	23	14	13	22	28	18	17	26	30	21	20	28

ويبين شكل (١٠ - ٥) توزيع القيم المعطاه وتوصيلها بخط أسود بالطريقة المعتادة للرسم البياني لسلسلة زمنية .



شكل ١٠ - ٥

والمستقيم الأسود هو خط الانحدار للنقط محسوباً بطريقة المربعات الصغرى باستخدام معادلة تتضمن a و b كما هو مبين أدناه . ويمكن الحصول على القيم المتوقعة لعام 1973 من هذا المستقيم بإضافة التغيرات الموسمية المناسبة إلى القيم التي نحصل عليها من المستقيم بعد استكمالها لعام 1973 . ويبين الخط المتقطع هذه القيم المتوقعة .

ويبين شكل (١٠ - ٦) عملية التحليل الكاملة . والعمودين الأولين من الجدول الزمني وأرقام الإنتاج المعطاه .

ولكى نوجد الاتجاه نحاول أن نوفق خطاً مستقيماً له المعادلة

$$p = a + bt$$

لهذه البيانات حيث p 's هي أرقام الإنتاج و t تمثل الزمن . ويلزم أولاً أن يكون الزمن في صورة رقمية . ولهذا الغرض اخترنا الزمن « صفر » عند الربع الرابع من عام 1970 وأخذنا الربع كوحدة للزمن فحصلنا على قيم t المذكورة في العمود الرابع .

ويمكن الآن أن نستخدم قوانين إيجاد a و b من الفصل التاسع . وفي مثالنا ستأخذ الصورة

$$b = \frac{\sum p t - (\sum p)(\sum t)/n}{\sum t^2 - (\sum t)^2/n}$$

$$a = \frac{\sum p - b \sum t}{n}$$

		الانتاج P	الزمن t	pt	t^2	T	$p - T = S + R$
1969	Q1	20	-7	-140	49	14.375	5.625
	Q2	12	-6	-72	36	15.125	-3.125
	Q3	10	-5	-50	25	15.875	-5.875
	Q4	18	-4	-72	16	16.625	1.375
1970	Q1	23	-3	-69	9	17.375	5.625
	Q2	14	-2	-28	4	18.125	-4.125
	Q3	13	-1	-13	1	18.875	-5.875
	Q4	22	0	0	0	19.625	2.375
1971	Q1	28	1	28	1	20.375	7.625
	Q2	18	2	36	4	21.125	-3.125
	Q3	17	3	51	9	21.875	-4.875
	Q4	26	4	104	16	22.625	3.375
1972	Q1	30	5	150	25	23.375	6.625
	Q2	21	6	126	36	24.125	-3.125
	Q3	20	7	140	49	24.875	-4.875
	Q4	28	8	224	64	25.625	2.375
		$\Sigma p = 320$	$\Sigma t = 8$	$\Sigma pt = 415$	$\Sigma t^2 = 344$		

	1969	1970	1971	1972	الوسط S
Q1	5.625	6.625	7.625	6.625	6.125
Q2	-3.125	-4.125	-3.125	-3.125	-3.125
Q3	-5.875	-5.875	-4.875	-4.875	-5.375
Q4	1.375	2.375	3.375	2.375	2.375
					البسطة = 0

شكل ١٠-٦

وهكذا يصبح لدينا

$$b = \frac{415 - (320 \times 8)/16}{344 - (64/16)} = \frac{415 - 160}{344 - 4} = \frac{255}{340} = 0.75$$

$$a = \frac{320 - 0.75 \times 8}{16} = 20 - 0.375 = 19.625$$

أي أن معادلة خط الانحدار بطريقة المربعات الصغرى هي $p = 19.625 + 0.75t$.
وبعد أن حصلنا على خط الاتجاه يمكننا حساب قيم الاتجاه للعمود الممنون T بالجدول ، وذلك بتعويض قيم t التالية $t = -7, t = -6, t = -5, \dots, t = 6, t = 7, t = 8$ في المعادلة $19.625 + 0.75t$ (وعلى سبيل المثال $19.625 - 0.75 \times 7 = 14.375$ ، وذلك لإيجاد أول قيمة بالجدول) . وهنا يمكن استخدام النموذج $p = T + S + R$ ومنها نستنتج أن $p - T = S + R$ وي طرح قيم T التي أوجدناها من قيم p نحصل على عمود لقيم $S + R$.

ويستخدم العمود الأخير كالمادة ، كما هو موضح بالجدول السفلي بشكل ١٠-٦ ، لإيجاد قيمة S لكل موسم يأخذ متوسط قيم $S + R$ للمواسم المعنية (وحيث أن مجموع الوسط هنا يساوي صفراً ، فلا حاجة لإجراء أي تصحيح) . وهكذا نحصل على الأرقام الموسمية الأربعة المذكورة . ويمكن الآن التنبؤ بالانتاج في الأرباع الأربعة لعام 1973 وللربع الأول Q1 لدينا $t = 9$ وبالتالي فإن

$$T = 19.625 + 0.75 \times 9 = 19.625 + 6.75 = 26.375$$

وبالنسبة لهذا الربع $Q1$ فإن القيمة الموسمية هي $S=6.125$ وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الأول $Q1$ من عام 1973 هي $26.375 + 6.125 = 32.5$

وللربع الثاني $Q2$ لدينا $S=5.375$ والاتجاه $T=19.625+0.75 \times 11=27.825$ وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الثاني $Q2$ من عام 1973 هي

$$27.125 - 3.125 = 24$$

وبالنسبة للربع الثالث $Q3$ لدينا $S=2375$ والاتجاه $T=19.625+0.75 \times 12=28.625$ وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الثالث $Q3$ من عام 1973 هي

$$27.825 - 5.375 = 22.45$$

وبالنسبة للربع الرابع $Q4$ لدينا $S=2375$ والاتجاه $T=19.625+0.75 \times 12=28.625$ وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الرابع $Q4$ من عام 1973 هي

$$28.625 + 2.375 = 31$$

وستناول الآن مثالا للتنبؤ سنوجد الاتجاه فيه بطريقة المتوسطات المتحركة .

مثال ١٠-٣-١ أرادت شركة للسفريات أن تحصل على فكرة عما تعنيه صورة السفريات بين المملكة المتحدة وجمهورية أيرلندا بالنسبة لأعمالها . ولهذا الغرض استخرجت الشركة الأعداد التالية للمسافرين (بالآلاف) بواسطة البحر كل ثلاثة أشهر من أيرلندا إلى المملكة المتحدة في الفترة من عام 1966 إلى عام 1969 .

1966				1967				1968				1969			
Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
87	103	444	77	84	146	500	64	56	171	550	87	72	180	596	96

استخدم نموذج السلاسل الزمنية $A=T+S+R$ وطريقة المتوسطات المتحركة لإيجاد الاتجاه والتغيرات الموسمية . ومن نتائج التحليل تنبأ بأرقام المسافرين في الأرباع الأربعة من عام 1970 استخدم الوسيط لقيم $S+R$.

الاجابة : بين شكل (١٠-٧) كل خطوات إيجاد الاتجاه والتأثيرات الموسمية . كما سبق اجراءها بالجزء ١٠-٢ ولذلك فلن نعلق عليها هنا مرة أخرى . والسؤال الآن هو كيف نقوم باستكمال الاتجاه ، وكيف نضيف التأثيرات الموسمية اليه لنحصل على التنبؤ المطلوب . وأحدى الطرق هي بتوقع قيم T على رسم بياني ورسم أفضل خط يتفق معها ، ثم قراءة القيم المقابلة للنقط الزمنية التي نهمنا . ويوضح شكل (١٠-٨) التوقع البياني لقيم T في هذا المثال ، وأفضل خط يتفق مع هذه القيم في تقدير المؤلف (وللقارئ أن يختلف مع هذا التقدير) .

وقراءة قيم T المتوقعة للأرباع الأربعة لعام 1970 نحصل على

Q1	Q2	Q3	Q4
248.5	253.5	258.75	263.75

		A	مجموع أربعة أرباع	مجموع خطوتين	T	A - T = S + R
1966	Q1	87				
	Q2	103				
	Q3	444	711	1419	177.375	266.625
	Q4	77	708	1459	182.375	-105.375
1967	Q1	84	751	1558	194.750	-110.750
	Q2	146	807	1601	200.125	-54.125
	Q3	500	794	1560	195.000	305.000
	Q4	64	766	1557	194.625	-130.625
1968	Q1	56	791	1632	204.000	-148.000
	Q2	171	841	1705	213.125	-42.125
	Q3	550	864	1744	218.000	332.000
	Q4	87	880	1769	221.125	-134.125
1969	Q1	72	889	1824	228.000	-156.000
	Q2	180	935	1879	234.875	-54.875
	Q3	596	944			
	Q4	96				

	1966	1967	1968	1969	المتوسط	S
Q1	-	-110.750	-148.000	-156.000	-148.000	-141.0
Q2	-	-54.125	-42.125	-54.875	-54.125	-47.1
Q3	266.625	305.000	332.000		305.000	312.0
Q4	-105.375	-130.625	-134.125		-130.625	-123.6
				-27.75 ÷ 4 = -7	-27.75	

شكل ١٠-٧

وعندئذ سيكون لدينا للربع الأول Q1

$$T + S = 248.5 - 141.0 = 107.5$$

وبتدوير هذه القيم إلى نفس درجة الدقة التي أعطيت بها البيانات الأصلية يكون تقديرنا للقيمة المتوقعة للربع الأول Q1 من عام 1970 هو 108

وبالنسبة للربع الثاني Q2 لدينا

$$T + S = 253.5 - 47.1 = 206.4$$

وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الثاني Q2 من عام 1970 هي 206
وبالنسبة للربع الثالث Q3 لدينا

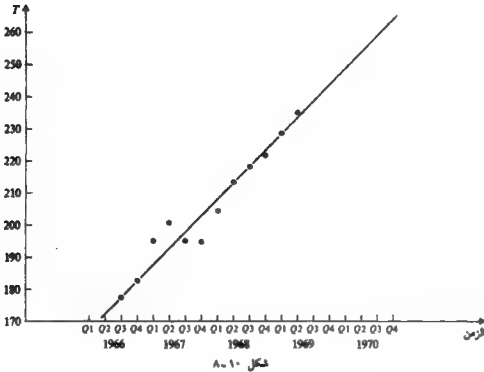
$$T + S = 258.75 + 312.0 = 570.75$$

وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الثالث Q3 من عام 1970 هي 571
وبالنسبة للربع الرابع Q4 لدينا

$$T + S = 263.75 - 123.6 = 140.15$$

وبالتالي ، فإن القيمة المتوقعة للربع الرابع Q4 من عام 1970 هي 140

وعندما يكون النمو في الاتجاه T مستقيماً بدرجة معقولة من نقطة إلى أخرى كما هو الحال في هذا المثال ، فهناك طريقة أخرى يمكن استخدامها بدلاً من الرسم البياني ، وهي حساب التغير المتوسط في الاتجاه لكل ربع وإضافة هذا التغير المتوسط مضروباً في عدد الأرباع التي نريد أن يصل إليها التنبؤ إلى آخر قيمة للاتجاه . وهذه الطريقة تقريبية ، ولكنها سريعة وبالنسبة للرسم البياني فإنها تعني استخدام الخط المستقيم الذي يصل أول وأخير نقطة . وبمستطوع أن نرى من شكل (١٠-٨) الذي رسم لهذا المثال أن هذا المستقيم ليس سيئاً . ولذلك فسنستعمل هذه الطريقة لحساب التنبؤات للأرباع الأربعة لعام ١٩٧٠ مرة أخرى .



ويزيد الاتجاه من ١٧٧.٣٧٥ في الربع الثالث Q3 لعام ١٩٦٦ إلى ٢٣٤.٨٧٥ في الربع الثاني Q2 من عام ١٩٦٩ . وهذا يمثل زيادة كلية قدرها ٥٧.٥ حدثت على مدى ١١ ربعاً . وهكذا فإن الزيادة المتوسطة لكل ربع هي $57.5 / 11 = 5.23$.

وهكذا فإن القيمة المتوقعة لـ T في الربع الأول Q1 من عام ١٩٧٠ هي

$$234.875 + 3 \times 5.23 = 250.565$$

والقيمة المتوقعة لـ T في الربع الثاني Q2 من عام ١٩٧٠ هي

$$234.875 + 4 \times 5.23 = 255.795$$

والقيمة المتوقعة لـ T في الربع الثالث Q3 من عام ١٩٧٠ هي

$$234.875 + 5 \times 5.23 = 261.025$$

والقيمة المتوقعة لـ T في الربع الرابع Q4 من عام ١٩٧٠ هي

$$234.875 + 6 \times 5.23 = 266.255$$

وبالتالى يكون لدينا للربع الأول Q1 $T + S = 250.565 - 141.0 = 109.565$ وبالتدوير تكون القيمة المتوقعة للربع الأول Q1 من عام 1970 هى 110

وبالنسبة للربع الثانى Q2 لدينا $T + S = 255.795 - 47.1 = 208.695$ وبالتدوير تكون القيمة المتوقعة للربع الثانى Q2 من عام 1970 هى 209

وبالنسبة للربع الثالث Q3 لدينا $T + S = 261.025 + 312.0 = 573.025$ وبالتدوير تكون القيمة المتوقعة للربع الثالث من عام 1970 هى 537

وبالنسبة للربع الرابع Q4 لدينا $T + S = 266.255 - 123.6 = 142.655$ وبالتدوير تكون القيمة المتوقعة للربع الرابع من عام 1970 هى 143

تعرين ١٠-٣-١ : فيما يلى مبيعات احدى السلع ذات الطابع الموسى الواضح لمدة ثلاث سنوات

المبيعات (بالآلاف)					
نوفمبر / ديسمبر	سبتمبر / اكتوبر	يوليه / اغسطس	مايو / يونيو	مارس / ابريل	يناير / فبراير
32.4	20.3	12.8	10.3	9.0	6.8
35.4	23.1	14.4	10.9	9.5	7.0
37.4	24.5	15.3	11.6	9.9	7.3

- ١ - أوجد الاتجاه بواسطة الانحدار ثم استخدم النتيجة للتنبؤ بالمبيعات فى شهرى يوليو/ اغسطس عام 1976 .
- ٢ - أوجد الاتجاه بواسطة المتوسطات المتحركة :

- (أ) استكمل الاتجاه بالرسم البيانى ، واستخدم النتائج للتنبؤ بالمبيعات فى يوليو/ اغسطس عام 1976 .
- (ب) استخدم تقرب النمو الخطى فى الاتجاه للتنبؤ بالمبيعات فى يوليو/ اغسطس عام 1976 .

(ج م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

تمارين

١٠-١ الأرقام التالية تتعلق بالجزء الخاص بالطعام من الرقم القياسى لأسعار التجزئة .

يناير 1962=100				
ديسمبر	سبتمبر	يوليو	مارس	الذى
109.9	108.1	109.1	105.8	1964
113.3	111.7	112.5	110.4	1965
117.0	115.1	118.4	113.1	1966
120.1	116.7	121.8	117.5	1967
		124.1	122.1	1968

والمطلوب :

- (أ) حساب المتوسط المتحرك لاربعة أرباع السنة للسلسلة الزمنية أعلاه .
- (ب) حساب التصحيح الموسى لكل من الأرباع .

- (ج) تطبيق التصحيحات على السلسلة أعلاه للحصول على سلسلة مصححة موسميا لأسعار الطعام .
(د) ارسم كلا من السلسلة الأصلية والسلسلة المصححة على رسم بياني واحد وعلق على النتائج .

(م م أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٦٩)

١٠-٢ بين الجدول التالي عدد الخلافات التي وقعت في إحدى الصناعات المؤمنة كل ثلاثة أشهر في الأعوام من ١٩٦٦ إلى ١٩٧١

العدد	الربع	السنة	العدد	الربع	السنة
9	1	1969	6	1	1966
9	2		6	2	
17	3		9	3	
11	4		7	4	
14	1	1970	5	1	1967
13	2		6	2	
19	3		10	3	
15	4		6	4	
15	1	1971	6	1	1968
16	2		6	2	
21	3		12	3	
16	4		8	4	

(أ) صحح هذه السلسلة الزمنية باستبعاد تأثير التغيرات الموسمية .

(ب) طبق طريقة المتوسطات المتحركة لتقدير الاتجاه على المدى البعيد .

(ج) قدر عدد الخلافات في كل ربع من أرباع سنة ١٩٧٢ .

(م م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

١٠-٣ تكون سلسلة زمنية من عدد من الموظفين ، m_t يتكون منظمة كبيرة شهريا في فترة عشر سنوات حيث تأخذ $t=1,2,\dots,120$ القيم

(أ) ما هو المقصود بعبارة « الاتجاه على المدى البعيد » و « التغيرات الدورية » و « التغيرات الموسمية » في هذا المجال ؟

(ب) كيف يمكن بحث كل من الخواص اذا كان لدينا مجموعة معينة من البيانات ؟

(ج) ما هي حدود التنبؤ الاحصائي المبني على سلسلة زمنية مدتها عشر سنوات من هذا النوع ؟

(م م أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٢)

١٠-٤ شركة لصناعة الأيس كريم لديها بيانات المبيعات التالية بآلاف الجالونات للسنوات الأربع الماضية وتريد الشركة الاستفادة منها للتنبؤ بالطلب على منتجاتها في السنوات القادمة .

السلسلة الأولى				السلسلة الثانية				السلسلة الثالثة				السلسلة الرابعة			
Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
477	1237	2546	498	415	1437	2541	542	514	1372	2715	588	493	1511	2706	628

- ١ - وضع لماذا يمكن تجاهل التغيرات الدورية عند اعداد تنبؤ من هذه الأرقام .
- ٢ - قارن بين طريقتي المتوسطات المتحركة والانتذار لايجاد الاتجاه في المثال العالي (لاداعي لاجراء الحسابات)
- ٣ - علق على التغيرات الموسمية الظاهرة في البيانات وبين كيف يمكن استخدام نموذج الجمع للسلسلة الزمنية لحساب التأثيرات الموسمية .
- ٤ - اشرح كيف يمكن اجراء التنبؤ المطلوب بعد الحسابات المذكورة في الجزئين ٢ و ٣ وعلق على هذه الطريقة للتنبؤ .

الفصل الحادى عشر

الارقام القياسية

١١-١ تكوين الأرقام القياسية

تستخدم الأرقام القياسية لاطهار الطريقة التى يتغير بها أحد المتغيرات التى تهتمنا - وكثيراً ما يكون السعر - مع الزمن - ويعبر الرقم القياسى عن السعر فى الوقت الذى يهتما (ويسمى الزمن المعلوم) كنسبة مئوية من السعر فى وقت آخر محدد (ويسمى زمن الأساس) وستوضح فى هذا الجزء تكوين الأنواع المختلفة من الأرقام القياسية للبيانات المعطاه فى المثال التالى :

بيانات المثال

فى دولة المستقبل تقوم الحكومة بتدبير كل ضروريات الحياة للأفراد ، وطبقا للقانون سيكون مسموحاً للأفراد باتفاق مرتباتهم على ثلاثة أنواع من السلع والخدمات فقط هى الدخان والسجائر ، والمشروبات ، والنقل العام . وستكون الكميات المتاحة لكل فرد من هذه السلع والخدمات مقننة . ويتغير كل من السعر ، والكمية مع الزمن حسب الجدول التالى :

البرج	1984		1989		1994	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية	السعر	الكمية
الدخان	2	2	5	1	8	1
المشروبات	3	2	12	3	20	5
النقل	1	2	6	2	30	1

(البيانات مأخوذة من م ١١ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٧)

وكمثال بسيط جداً لنفرض أننا نريد حساب الرقم القياسى لسعر الدخان مستخدمين سنة 1984 كنسبة الأساس ، وسنة 1989 كالزمن المعلوم . وسيكون هذا الرقم كما يلى :

$$\frac{5}{2} \times 100 = 250\%$$

أى أن السعر عند الزمن المعلوم $2\frac{1}{2}$ ضعف السعر عند زمن الأساس . وهذا يعنى وجود زيادة قدرها 150% فى سعر الدخان .

لاحظ أن النسبة بين

$$\frac{\text{السعر عند الزمن المعلوم}}{\text{السعر عند زمن الأساس}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

(ولا يعبر عنها كنسبة مئوية) تسمى « منسوب السعر » للدخان باعتبار سنة 1984 كنسبة أساس وسنة 1989 كنسبة معطاه . وسنعود مرة أخرى لمناسيب السعر فيما بعد .

لاحظ كذلك أن قيمة الرقم القياسى عند زمن الأساس تساوى دائما 100 حيث أن

$$\frac{\text{سعر زمن الأساس}}{\text{سعر زمن الأساس}} = 100 \times 1 = 100$$

ولذلك فمن المعتاد فى الاحصائيات المنشورة اعلان البيانات القياسية فى الصورة

$$100 = 1974 \text{ يناير } 15$$

والمثال السابق بسيط جدا ، ولا يشمل الا سلعة واحدة . أما فى الواقع العملى ، فإننا نحتاج لتجميع التغير فى أسعار عدة سلع للحصول على رقم قياسى شامل مثل « الرقم القياسى لتكاليف المعيشة » . ولتوضيح هذه الفكرة سنقوم بتجميع التغيرات فى أسعار كل الدخان والمشروبات والنقل فى المثال بكل الطرق الممكنة .

الأرقام القياسية التى تعطى كل السلع وزنا متساويا

كخطوة أولى سنهمل الكميات المسموح بها من السلع المختلفة ، ونفكر فى الطرق التى يمكن بها تجميع الأسعار فقط للحصول على رقم قياسى .

١ - الرقم القياسى التجميعى البسيط لنفرض أننا نريد التعبير عن تكاليف المعيشة عام 1994 كنسبة مئوية من تكاليف المعيشة عام 1989 . وأبسط طريقة لعمل ذلك هى بجمع سعر الدخان + سعر المشروبات + سعر النقل ، ومقارنة المجموع عام 1994 بالمجموع عام 1989 . أى

$$\frac{8 + 20 + 30}{5 + 12 + 6} \times 100 = \frac{59}{23} \times 100 = 252.2\%$$

ويسمى هذا بالرقم القياسى التجميعى . والواقع أننا نقارن الأسعار المجمعة ببعضها

وإذا كانت أسعار سنة الأساس يرمز لها بالرمز p_0 وأسعار السنة المعطاه يرمز لها بالرمز p_1 فإن الرقم القياسى التجميعى البسيط يساوى .

$$\frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$$

٢ - الوسط البسيط لمناشيب الأسعار لتفرض مرة أخرى اتنا نريد حساب رقم قياسي للأسعار باستخدام سنة 1989 كسنة أساس وسنة 1994 كسنة معطاه باستخدام الأسعار فقط . وهناك طريقة أخرى يمكن أن نتبعها وهي : بحساب رقم قياسي منفصل لكل سلعة ثم أخذ متوسط هذه الأرقام . ويمكن إجراء ذلك بحساب منسوب السعر لكل سلعة ، ثم إيجاد وسط مناسيب الأسعار ، وفي النهاية ضرب النتيجة في 100 . وفي مثالنا يكون لدينا

$$\frac{8/5 + 20/12 + 30/6}{3} \times 100 = \frac{1.6 + 1.667 + 5}{3} \times 100 = \frac{8.267}{3} \times 100 = 275.6\%$$

وبصفة عامة - إذا كانت أسعار زمن الأساس هي p_0 وأسعار الزمن المعلوم p_n فإن الوسط البسيط لمناشيب الأسعار هو

$$\frac{1}{k} \sum \frac{p_n}{p_0} \times 100$$

حيث k عدد السلع .

تمرين ١١-١-١٠ احسب ما يلي

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط .

(ب) الوسط البسيط لمناشيب الأسعار مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة .

وليس للأرقام القياسية التي تعطي وزنا متساويا لكل السلع استخدام كبير عمليا لأن بعض السلع أكثر أهمية من الأخرى ، ويجب إعطاؤها وزنا أكبر عند تحديد قيمة الرقم القياسي . ولكننا قمنا بدراسة هذا النوع لأن الأنواع الأخرى من الأرقام القياسية المستخدمة عمليا هي عبارة عن امتداد لهذا النوع من إعطاء أوزان مختلفة للسلع المختلفة . وتعرف هذه الأرقام باسم الأرقام القياسية التجميعية المرجحة والوسط المرجح لمناشيب الأسعار .

الأرقام القياسية التي تعطي أوزانا مختلفة للبيوت المختلفة

١ - الأرقام القياسية التجميعية المرجحة . يمكن اعتبار عدد السلع من نوع معين المبيعة ، أو المتبعة ، أو المستهلكة ، أو ما أشبه كمقياس لأهمية تلك السلعة عند تحديد التغير الكلي في الأسعار . وهكذا فإن أسعار السلع المختلفة ترجع بكميات تتعلق بفترة زمنية معينة للحصول على الأرقام القياسية التجميعية المرجحة . وهناك عدة أنواع مختلفة من الأرقام القياسية التجميعية المرجحة حسب الكميات المستخدمة كأوزان للترجيح والفترات الزمنية التي تنتمي إليها تلك الكميات .

(١) رقم لاسبيرز القياسي

في هذا الرقم تستخدم الكميات المأخوذة من سنة الأساس كأوزان للترجيح وهكذا ، فإن رقم لاسبيرز القياسي باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة سيكون :

$$\frac{1 \times 8 + 3 \times 20 + 2 \times 30}{1 \times 5 + 3 \times 12 + 2 \times 6} \times 100 = \frac{128}{53} \times 100 = 241.5\%$$

وعموما لو رمزنا لأسعار سنة الأساس بالرمز p_0 ولكميات سنة الأساس بالرمز q_0 ولأسعار الزمن المعلوم بالرمز p_n تكون لدينا الصيغة التالية لرقم لاسبيرز

$$\frac{\sum (p_n q_0)}{\sum (p_0 q_0)} \times 100$$

تعرين ١١ - ١ - ٢ احسب رقم لاسييز القياسي مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة .
(٢) رقم باش القياسي

في هذا الرقم تستخدم الكميات المأخوذة من السنة المعطاة كأوزان للترجيح وهكذا ، فان رقم باش القياسي باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة هو :

$$\frac{8 \times 1 + 20 \times 5 + 30 \times 1}{5 \times 1 + 12 \times 5 + 6 \times 1} \times 100 = \frac{138}{71} \times 100 = 194.4\%$$

وعموما لو رمزنا لكميات السنة المعلومة بالرمز q_n وللكميات الأخرى بنفس الرموز المذكورة أعلاه سنجد أن رقم باش القياسي يساوي

$$\frac{\sum(p_n q_n)}{\sum(p_0 q_n)} \times 100$$

تعرين ١١ - ١ - ٣ احسب رقم باش القياسي مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة .

(٣) الرقم القياسي بطريقة السنة النموذجية

هذا الرقم هو أيضا رقم قياسي تجميعي مرجع حيث أنه يكون في الصورة

$$\frac{\sum(p_n w)}{\sum(p_0 w)} \times 100 \text{ عند استخدامه كرقم قياسي للأسعار}$$

والأوزان المستخدمة للترجيح في هذه المرة هي كميات مرتبطة بزمان ليس زمن الأساس ، ولا الزمن المعلوم . وعلى سبيل المثال لنفترض أننا حسبنا الرقم القياسي باعتبار سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة ، ولكننا أخذنا كميات سنة 1989 . وعندئذ

$$\frac{8 \times 1 + 20 \times 3 + 30 \times 2}{2 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 2} \times 100 = \frac{8 + 60 + 60}{2 + 9 + 2} \times 100 = \frac{128}{13} \times 100 = 984.6\%$$

ولو رمزنا لكميات تلك السنة ، وتعرف باسم السنة النموذجية بالرمز q مع بقاء باقى الرموز كما سبق ستكون الصيغة العامة للرقم القياسي بطريقة السنة النموذجية هي

$$\frac{\sum(p_n q_t)}{\sum(p_0 q_t)} \times 100$$

تعرين ١١ - ١ - ٤ احسب الرقم القياسي بطريقة السنة النموذجية باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة مع أخذ كميات سنة 1984 كأوزان للترجيح .

الأرقام القياسية للكميات والرقم القياسي للقيمة كل الأرقام القياسية التي تناولناها حتى الان كانت أرقاما قياسية للأسعار . وكانت هذه الأرقام تقارن تكاليف مجموعة محددة من السلع في وقت ما بتكاليفها في وقت آخر . وفي بعض الحالات - وعلى سبيل المثال : الرقم القياسي للإنتاج الصناعي - يكون المطلوب مقارنة الكمية المنتجة في وقت ما بالكمية المنتجة في وقت آخر .

ويمكن الحصول على رقم قياسي تجميعي بسيط للكميات بمقارنة مجموع الكميات في السنة المعطاة بمجموعها في سنة الأساس . أى أن

$$\frac{\sum q_n}{\sum q_0} \times 100 = \text{الرقم القياسي التجميعي البسيط}$$

ويمكن إيجاد وسط بسيط للمناسب بحساب منسوب الكمية q_n / q_0 لكل بند ، ثم إيجاد متوسط تلك المناسيب .

$$\frac{1}{k} \sum \frac{q_n}{q_0} \times 100 = \text{الرقم البسيط لمناسيب الكميات}$$

ويمكن قياس أهمية أى بند عند حساب الرقم القياسي للكميات عن طريق سعر ذلك البند . أى أن زيادة ما في عدد سيارات الجاجوار المنتجة أكثر أهمية من نفس الزيادة في عدد سيارات الميني . وهكذا نرى كيف يمكن إيجاد رقم قياسي كمى مرجح باستخدام الأسعار في لحظة زمنية معينة كأوزان لترجيح الكميات في كل من البسط والمقام . أى أن رقم لاسبيرز القياسي للكميات يكون :

$$\frac{\sum (q_n p_0)}{\sum (q_0 p_0)} \times 100$$

ورقم باش القياسي للكميات يكون :

$$\frac{\sum (q_n p_n)}{\sum (q_0 p_n)} \times 100$$

أما الرقم القياسي للقيمة ، فله نفس الصورة العامة مثل : الرقم القياسي التجميعي المرجح اذ يتكون أيضا من مجموع حاصل ضرب السعر \times الكمية في البسط مقسوما على مجموع آخر لحاصل ضرب السعر \times الكمية . ولكن هذا الرقم ليس رقما قياسيا للأسعار ولا للكميات . إذ أنه يقيس التغير في إجمالي قيمة المبيعات ، أو الأنتاج ، أو أى شيء مشابه كنتيجة للتغير في كل من السعر والكمية وهكذا فإن :

$$\frac{\sum (p_n q_n)}{\sum (p_0 q_0)} \times 100 = \text{الرقم القياسي للقيمة}$$

ويبين البسط القيمة الاجمالية للمبيعات مثلا في السنة المعطاة في حين يبين المقام القيمة الاجمالية للمبيعات في سنة الأساس .

وإذا أخذنا سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاه يكون الرقم القياسي للقيمة مساويا

$$\frac{8 \times 1 + 20 \times 5 + 30 \times 1}{5 \times 1 + 12 \times 3 + 6 \times 2} \times 100 = \frac{8 + 100 + 30}{5 + 36 + 12} \times 100 = \frac{138}{53} \times 100 = 260.4\%$$

تعرين ١١ - ١ - ٥ : احسب الرقم القياسي للقيمة مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة .

تعليقات على الأنواع المختلفة من الأرقام القياسية التجميعية المرجحة

رقم لاسبيرز هو أكثر الأرقام القياسية التجميعية المرجحة استخداما . وفي الواقع ، فإن الرقم القياسي للاتنتاج الصناعى هو في حقيقة الأمر رقم لاسبيرز كمى . وهذا الرقم مرجح من وجهة النظر الادارية إذ أنه بعد إيجاد الأوزان المرجحة تبقى هذه الأوزان ثابتة حتى يتقرر الانتقال إلى تاريخ جديد للأساس . ومن جهة أخرى ، فإنه إذا تغير موقف

الطلب ، أو الانتاج تغيرا كبيرا ، فقد يصبح نظام الترجيح غير متفق مع الموقف الحالي . كما يؤخذ على هذا الرقم أنه في أوقات التضخم يميل إلى المبالغة في إظهار معدل التضخم حيث أنه لا يأخذ في الاعتبار انخفاض الطلب على السلع التي إرتفعت أسعارها إرتفاعا كبيرا ، وأثر هذا الانخفاض على تكاليف المعيشة . وهناك ميزة أخرى لهذا النوع من الأرقام القياسية ، وهو أن كل قيمة تنشر لرقم لاسميرز ضمن سلسلة من تلك القيم تشير لنفس المجموعة من السلع .

أما رقم باش فميزته أنه يشير إلى مجموعة حديثة من السلع ، وهكذا فإنه يعبر عن التغير في سعر تلك السلع التي تباع ، أو تنتج ... الخ ، حاليا ، ويكون هذا مقيدا بصفة خاصة : إذا كان الموقف يتغير بشدة . ويعيب هذا الرقم أنه يظهر معدل التضخم بأقل من حقيقته بسبب الانخفاض في الطلب على بعض السلع التي ارتفع سعرها بسرعة . والمشكلة العملية الرئيسية بالنسبة لرقم باش هي في كيفية إيجاد الأوزان الحديثة ، فقد تكون البيانات المطلوبة جميعها لهذا الغرض مكلفة ، أو صعبة ، أو حتى مستحيلة . ولهذا السبب ، فإن رقم باش لا يستخدم كثيرا . وفي كل مرة يحسب فيها رقم باش يكون المرجع مجموعة مختلفة من السلع ، ولذلك فإنه لا يمكن مقارنة أرقام باش المتتالية في سلسلة واحدة مقارنة مباشرة .

أما الرقم القياسي بطريقة السنة النموذجية فهو مفيد عندما تكون لدينا بيانات جيدة عن الكميات في إحدى السنوات بسبب أنها كانت سنة لتعداد الانتاج مثلا في حين أن سنة أخرى قد فصلت كسنة أساس ربما يسبب إمكان مقارنتها مع أرقام قياسية أخرى . ولما كانت مجموعة السلع ثابتة ، فإن هذا الرقم لا يحتاج لجميع كميات كبيرة من البيانات للحصول على أوزان الترجيح ، كما أنه يعطي سلسلة من القيم تسهل مقارنتها ببعضها . وبالميل فإن الأوزان لن تكون حديثة ، كما في رقم باش ، ولكن إذا كانت السنة النموذجية لاحقة على سنة الأساس فإن الأوزان ستكون أحدث منها في رقم لاسميرز . وبالإضافة إلى ذلك ، فإن السنة التي تؤخذ الأوزان طبقا لها سنة متوسطة مما سيقبل من أثر تغييرات الطلب بين سنة الأساس والسنة المعطاة والنتيجة عن تغير الأسعار على قيمة الرقم . أما إذا كانت السنة النموذجية سابقة لسنة الأساس ، فإن هذه المشاكل « اللاسميرية » ستزداد بدلا من أن تنقص .

٢ - الوسط المرجح للمناسيب

هذا الرقم عبارة عن امتداد للوسط البسيط لمناسيب الأسعار . وفيه يؤخذ وسط مرجح للمناسيب بدلا من الوسط البسيط بضرب كل من المناسيب في وزن معين ، ثم قسمة النتيجة على مجموع الأوزان . وهكذا فإن الصيغة العامة للوسط المرجح لمناسيب الأسعار هي :

$$\frac{\sum (p_n/p_0)w}{\sum w} \times 100$$

ولايجرى الترجيح في هذه الحالة بواسطة كميات ، كما في حالة الأرقام القياسية التجميعية المرجحة ، وإنما بواسطة قيم (أى السعر × الكمية) ترجع إلى فترة زمنية معينة . وهنا أيضا يمكن استخدام أوزان ترجيحية من أى فترة زمنية (ولكن الأرقام الناتجة لاتحمل أسماء أشخاص في هذه الحالة) . ويسرى على الأزمنة التي يعود إليها الترجيح نفس ما قيل في حالة الأرقام القياسية التجميعية المرجحة .

والوسط المرجح للمناسيب من الأرقام القياسية الهامة جدا عمليا . وأغلب الأرقام القياسية المنشورة في المملكة المتحدة من هذا النوع . وسرى فيما بعد السبب في ذلك .

(١) الترجيح طبقا لقيم زمن الأساس

الأوزان المستخدمة للترجيح في هذه الحالة هي $w = p_o q_o$ وبالنسبة لبيانات دولة المستقبل ، وباعتبار سنة 1989 كسنة أساس وسنة 1994 كسنة معلومة تكون قيمة هذا الوسط المرجح :

$$\frac{\frac{1}{5} \times (5 \times 1) + \frac{3}{10} \times (12 \times 3) + \frac{2}{5} \times (6 \times 2)}{(5 \times 1) + (12 \times 3) + (6 \times 2)} \times 100 = \frac{1.6 \times 5 + 1.67 \times 36 + 5 \times 12}{5 + 36 + 12} \times 100$$

$$= \frac{8 + 60 + 60}{53} \times 100 = 241.5\%$$

وهذه القيمة هي نفس ما حصلنا عليه عندما أوجدنا رقم لاسبيرز ، وليس هذا مستغربا لأن الصيغة :

$$\frac{\sum [(p_n/p_o)(p_o q_o)]}{\sum (p_o q_o)} \times 100 = \frac{\sum (p_n q_o)}{\sum (p_o q_o)} \times 100$$

هي صيغة رقم لاسبيرز القياسي .

تعرين ١١ - ١ - ٦: أوجد الوسط المرجح طبقا لنسبة الأساس لمناسيب الأسعار باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة :

(٢) الترجيح طبقا لقيم السنة المعلومة

في هذه الحالة ، فإن أوزان الترجيح هي $w = p_n q_n$ وبالنسبة لبيانات دولة المستقبل لو أخذنا سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة يكون الوسط المرجح مساويا .

$$\frac{\frac{1}{5} \times (8 \times 1) + \frac{3}{10} \times (20 \times 5) + \frac{2}{5} \times (30 \times 1)}{(8 \times 1) + (20 \times 5) + (30 \times 1)} \times 100 = \frac{1.6 \times 8 + 1.67 \times 100 + 5 \times 30}{8 + 100 + 30} \times 100$$

$$= \frac{12.8 + 167 + 150}{138} \times 100 = \frac{329.8}{138} \times 100 = 239.0\%$$

تعرين : احسب الوسط المرجح لمناسيب الأسعار طبقا للزمن المعلوم اذا كانت سنة 1984 هي سنة الأساس ، وسنة 1994 هي السنة المعلومة

(٣) الترجيح طبقا لقيم السنة النموذجية

في هذه الحالة ، فإن أوزان الترجيح هي $w = p_n q_n$ وتعود لسنة ما ليست سنة الأساس ولا السنة المعلومة . ويكون هذا مناسباً اذا كانت الأوزان المتاحة لأحدى السنوات جيدة . ولكن يفضل أخذ سنة أخرى كسنة أساس . وهذه الطريقة هي الطريقة المستخدمة لحساب الرقم القياسي لأسعار الجملة .

وبالنسبة لبيانات دولة المستقبل لو أخذنا سنة 1984 كسنة أساس وسنة 1994 كسنة معطاه وقيم سنة 1989 كأوزان يكون الرقم

$$\frac{\frac{1}{5} \times (5 \times 1) + \frac{3}{10} \times (12 \times 3) + \frac{2}{5} \times (6 \times 2)}{(5 \times 1) + (12 \times 3) + (6 \times 2)} \times 100 = \frac{5 \times 4 + 6.67 \times 36 + 30 \times 12}{5 + 36 + 12} \times 100 = 1170.0\%$$

تعرين ١١ - ١ - ٧ حسب الوسط المرجع لمناسيب الأسعار باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة وتقيم سنة 1984 كأوزان للترجيح .

مقارنة الأنواع المختلفة من الأرقام القياسية

للأرقام القياسية التجميعية البسيطة ميزة هى سهولة الحساب ، ولكنها ليست نوعا مفيدا من الأرقام القياسية لسببين : الأول هو أنه ليس من الواقع فى شيء أن نفترض أن لكل السلع نفس درجة الأهمية بحيث تأخذ نفس الوزن عند حساب الرقم القياسى . والسبب الثانى ، وهو أكثر أهمية هو « مشكلة الوحدات » . فعند تكوين رقم قياسى للأسعار لسلع مقاسة بوحدات مختلفة لا يكون واضحا كيفية استخدام الأسعار فى المجاميع المختارة . وعلى سبيل المثال ثمن كم من الدخان يجب أن يضاف لثمن سيارة ؟

وبالمثل فإن الوسط البسيط للمناسيب سهل الحساب ، وإن كان حسابه أصعب نوعا من حساب الرقم القياسى التجميعى البسيط . كما أنه يتغلب على مشكلة الوحدات حيث أن كلا من مناسيب الأسعار يتضمن النسبة بين سعرى نفس الكمية فى أوقات مختلفة . ومع ذلك فهذا الوسط يفترض أمرا غير واقعى ، وهو تساوى كل السلع فى الأهمية ، ولذلك فهو لا يستعمل إلا نادرا .

أما الأرقام القياسية التجميعية المرجحة ، فهى أبسط نوع من الأرقام القياسية المرجحة فى الحساب . وفى هذه الأرقام تعطى أوزان مختلفة للسلع المختلفة ، ولذلك لا توجد مشكلة للوحدات حيث أن الأوزان هى عادة أعداد من الوحدات .

وأصعب الأرقام حسابا هو الوسط المرجح للمناسيب ، ولكنه أكثرها استخداما . ولهذه الأرقام نفس المزايا مثل الوسط البسيط للمناسيب كما أنها أيضا تعطى أوزانا مختلفة للبند المختلفة. وميزتها الأساسية هى أنها تسمح بتجميع عدة أرقام قياسية منفصلة لمجموعات صغيرة من البند مما باستخدام أوزانها للحصول على رقم قياسى شامل . ويستخدم هذا النوع من الأرقام القياسية بصفة خاصة لحساب الرقم القياسى لأسعار التجزئة الذى ستتناوله فى الجزء التالى .

تعرين ١١ - ١ - ٨

- (أ) لماذا ترجع الأسعار عند تكوين رقم قياسى للأسعار عادة بواسطة الكميات ؟
- (ب) فى أى الظروف يفضل ترجيح الأسعار بواسطة الكميات الحالية بدلا من كميات سنة الأساس ؟
- (ج) أجز الحسابات المناسبة لتقدير النسبة المئوية للزيادة الكلية فى الأسعار من عام 1970 إلى عام 1975 للسلع المبينة أدناه . أذكر اختيارك لنظام الترجيح

المتجر	1970		1975	
	الكمية المباعة (بالمليون)	الـ ثمن (١٠٠ لكل 1000)	الكمية المباعة (بالمليون)	الـ ثمن (١٠٠ لكل 1000)
توكات	1.6	6	2.4	10
كليبست	3.4	9	3.0	12
مشابك	2.7	8	2.8	10

(ج م - م - الأسس ب - يونيو ١٩٧٦)

تمرين ١١-٩ : يتضمن رقما قياسيا لأسعار الطعام (FPI) السلع المينة اذنه مرجحة طبقا للكميات التي تستأولها العائلة المتوسطة كما يلى :

الوزن	السعر	
7 أرغفة	20 بنسا/ رغيف	الخبز
20 رغلا	12 بنسا/ رطل	البطاطس
15 بيتا	8 بنسات/ بيتا	البن
مستان	40 بنسا/ صفة	البيض
10 أرطال	80 بنسا/ رطل	اللحم

ويتنظر أن يرتفع سعر الخبز فى العام العام القادم بمقدار 10% وأن يرتفع سعر البطاطس بمقدار 25% وأن ينخفض سعر اللبن بمقدار 10% وأن ينخفض سعر البيض بمقدار 5% وأن يزيد سعر اللحم بمقدار 30% .

والمطلوب :

- (١) حساب الرقم القياسى لسعر الطعام المتوقع بعد سنة إذا كان الرقم القياسى الحالى هو 112 .
 - (٢) حساب الرقم القياسى لسعر الطعام المتوقع بعد ثلاث سنوات اذا استمرت الأسعار فى التغير بنفس المعدل .
 - (٣) اذا افترضنا أن الناس سينفقون أكثر على اللبن والبيض ، وأقل على اللحم خلال العام القادم ، فكيف يؤثر ذلك على الاجابة على الجزء الأول من السؤال إذا استخدم رقم قياسى مرجح طبقا للكميات الحالية ؟
 - (٤) لماذا يمكن للرقم القياسى للأسعار المرجح طبقا للكميات الحالية أن يكون غير مرضى ؟
- (جدم - الأساس ب - يونيو ١٩٧٧)

١١ - ٢ الرقم القياسى لأسعار التجزئة

هذا الرقم هو أكثر رقم يعرفه الناس بين كل الاحصائيات الرسمية فى المملكة المتحدة . ويلقى هذا الرقم قبولا عاما من طرفى العلاقات الصناعية ، ومن الناس عامة بغض النظر عن معتقداتهم السياسية كمؤشر للتضخم المحلى . وأحيانا تثار الاعتراضات على هذا الرقم لأنه لايعكس جيدا التضخم الذى تعاني منه بعض قطاعات المجتمع ، ولأنه يستبعد بعض العناصر التى يعتبر البعض أنه يجب أن يتضمنها مثل الجزء الخاص برأس المال فى سداد الرونات ، والتأمين وأقساط المعاش وضريبة الدخل . ومع ذلك فنظرا لأن هذا الرقم تقوم بالإشراف على تحديده اللجنة الاستشارية للرقم القياسى لأسعار التجزئة (وبها ممثلون لكل من اتحاد العمال ، واتحاد الصناعات ، وجمعيات التجارة ، والمستهلكين فضلا عن موظفين تابعين لوزارة العمل) فانه معترف به كمحاولة عادلة لاعطاء مقياس شامل للتضخم فى الأسعار . وعند التفاوض على الأجور يعترف الطرفان بهذا الرقم ، كما أنه مستخدم كأساس لبعض نظم الادخار التى تدعمها الدولة ، وقد ربطت به كثير من المعاشات وخاصة فى القطاع الحكومى ، وهناك بعض الأرقام القياسية الفرعية المشتقة منه تستخدم للتحديث السنوى لمبالغ التأمين . وسنبحث بعضا من هذه الاستخدامات فى البند ١١ - ٣ . ونظرا لأهمية الرقم القياسى لأسعار التجزئة ، فستأول فى هذا الجزء طريقة تكوينه .

وهذا الرقم هو فى واقع الأمر وسط مرجح لمناشيب السعر ، وتلويغ الأساس له هو ١٥ يناير عام ١٩٧٤

وليس ممكناً أن يتضمن الرقم القياسي كل أنواع السلع ، والخدمات التي يمكن تصورها كما أنه لن يتحسن مادياً لو تضمنها جميعاً . والمطلوب فعلاً هو اختيار عدد من السلع والخدمات الممثلة ، وقد اختير منها 350 . وتتقسم هذه البند إلى 95 قسماً يمكن تصنيفها إلى 11 مجموعة . والخطوة الأولى هي الحصول على منسوب السعر لكل من البند إلى 350 باعتبار يوم الثلاثاء الأقرب إلى منتصف الشهر الذي سينسب الرقم إليه كزمن معلوم ويوم الثلاثاء الأقرب إلى منتصف شهر يناير السابق مباشرة كزمن أساس . وهذا يعني ضرورة الحصول على 150 000 عرضاً منفصلاً للأسعار يوم الثلاثاء الأقرب إلى منتصف كل شهر . ويمكن الحصول على بعض الأسعار مركزياً ، ولكن اكتشاف معظم الأسعار في المحلات يتطلب قيام موظفي مكاتب إعاية البطالة بوزارة العمل بزيادة عينة محددة من المتاجر الموزعة على مدى البلاد لتسجيل الأسعار الفعلية للبيع .

وبعد الحصول على مناسيب الأسعار وعددها 350 بحسب وسط مرجح لكل من الأقسام وعددها 95 . والأوزان التي تستخدم لهذا الغرض هي النسب المحددة كجزء من ألف للأنفاق على كل من البند إلى 350 طبقاً لما تم تحديده « بإحصاء الانفاق العائلي » الذي تم إجراؤه في العام المنتهى في شهر يونيو الماضي . وهكذا ، فإنه خلال كل سنة تستخدم مجموعة مختلفة من الأوزان . وهذا يجعل طريقة الترجيح في هذا الرقم حديثة دائماً .

وبعد إيجاد الأرقام القياسية للأقسام الـ 95 تجمع هذه الأخيرة ما باستخدام مجموعة أوزان كل قسم لتعطى الأرقام القياسية للمجموعات الـ 11 . وهنا نرى ميزة استخدام الوسط المرجح للمناسيب . ولو كان المستخدم هو رقم قياسي مرجح لكل من الأقسام الـ 95 لما أمكن استخدام هذه الوسيلة لتجميع الأرقام القياسية الجزئية .

ويتجميع الأرقام القياسية للمجموعات الاحدى عشرة مستخدمين أوزانها نحصل على الرقم القياسي الكلى للشهر المعنى كزمن معلوم وشهر يناير السابق كزمن أساس . وهكذا فإن لدينا سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة . وعند النشر يجب الرجوع إلى يناير عام 1974 كتاريخ أساس . وهذا يعني ضرب الرقم القياسي كما تم حسابه أعلاه في جميع الأرقام من يناير إلى يناير حتى نصل إلى يناير 1974 . وعلى سبيل المثال ، فإن الرقم القياسي المنشور لشهر يوليو 1976 يتم إيجاده كما يلي :

- (الرقم القياسي المحسوب باعتبار شهر يوليو 1976 زمناً معلوماً ، وشهر يناير 1976 زمناً أساسياً)
- × (الرقم القياسي ليناير 1976 كزمن معلوم ، وشهر يناير 1975 كزمن أساسى)
- × (الرقم القياسي ليناير 1975 كزمن معلوم ، وشهر يناير 1974 كزمن أساسى)

ونلاحظ أن حاصل ضرب الرقمين الآخرين هو ما نشر كرقم قياسي في يناير 1976 . وميزة هذه الطريقة على الطريقة الأخرى ، وهي إرجاع المناسيب الأصلية مباشرة إلى سنة 1974 قبل حساب الوسط المرجح (وهو ما يعطى سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة) هي أنها تسمح بترجيح أى تغير نسبي في الأسعار في فترة ما طبقاً لمجموعة حديثة من كميات السلع .

وتنشر كذلك أرقام قياسية منفصلة للأسر المكونة من فرد أو فردين على المعاش . ومع أن نظام الترجيح يختلف كثيراً عن ذلك المستخدم للرقم القياسي العام (الذى حذف مثل تلك الأسر من حسابه ، وخاصة إذا كانت ثلاثة أرباع الدخل على الأقل من مصادر التأمين القومى) فإن الرقم القياسي الفعلى لا يختلف كثيراً عن الرقم القياسي العام . وهذا يجعلنا نشطون إلى أن الرقم القياسي العام هو متوسط طيب لقياس التضخم .

وينشر الرقم القياسي لأسعار التجزئة شهرياً بمجموعاته الرئيسية الاحدى عشرة وهي : الطعام ، المشروبات ، الدخان والسجائر ، الإسكان ، الوقود والإنارة ، السلع المنزلية المعمرة ، الملابس والأحذية ، النقل والسيارات ، السلع

المتنوعة ، الخدمات ، الوجبات المشتراة والمستهلكة خارج المنزل . وتقسم بعض هذه المجموعات للنشر إلى مجموعات فرعية . وعلى سبيل المثال : فإن مجموعة النقل والسيارات تنقسم إلى مجموعتين فرعيتين هما : ركوب السيارات أو الدراجات ، وأجور الانتقال .

ويعطى لكل مجموعة ، ومجموعة فرعية لها رقمها القياسي ووزنها داخل الرقم القياسي العام بالأجزاء من ألف جزء .

وستتناول المجموعة الفرعية « ركوب السيارات ، والدراجات » وهي جزء من مجموعة « النقل والسيارات » لثري كيف تتكون من أقسام والبنود الممثلة لتلك الأقسام .

البند	القسم	المجموعة الفرعية
ركوب السيارات والدراجات	شراء المركبات	طرازات متعددة من السيارات المستعملة
	صيانة المركبات	الدراجات بمحرك
	البزين والزيوت	تكاليف عمليات صيانة
	ترخيص المركبات	اطارات السيارات والموتوسيكلات
	تأمين المركبات	البترول
		زيت المحرك
		التراخيص السنوية للسيارات
		التراخيص السنوية للموتوسيكلات
		التأمين الإجباري لسيارات وموتوسيكلات معينة

وثاني الاختيار الأولي عن الرقم القياسي لأسعار التجزئة في نشرة صحفية تصدرها وزارة العمل عادة يوم الجمعة التالي بعد أربعة أسابيع ونصف من يوم الثلاثاء الذي جمعت فيه بيانات الأسعار . ونشر الرقم القياسي مقسما إلى مجموعات ومجموعات فرعية وأقسام لأول مرة في العدد الشهري من نشرة وزارة العمل . ثم يعاد نشره في مختلف النشرات الاختصاصية الملخصة بما فيها « الملخص الشهري للاحصاء » و « الاتجاهات الاقتصادية » و « الملخص السنوي للاحصاء » .

تعرين ١١ - ٢ - ١ : كثيرا ما تستخدم مختلف قطاعات المجتمع الرقم القياسي لأسعار التجزئة وترجع إليه .

وضح كيف يمكن تكوين هذا الرقم القياسي ، ثم بين كيف يستخدم للمساعدة في :

١ - الإدارة

٢ - ممثلي العمال

٣ - المستهلكين .

١١- ٣ تفسير الأرقام القياسية واستخدامها

(أ) التغيرات بالبنط وكنسبة مئوية

اعتبر المجموعة التالية من قيم الرقم القياسي لأسعار التجزئة :

16 أكتوبر عام 1973	(16 يناير 1962 = 100)
15 يناير عام 1974	(16 يناير 1962 = 100)
15 أكتوبر عام 1974	(15 يناير 1974 = 100)
15 يوليو عام 1975	(15 يناير 1974 = 100)

والزيادة من أكتوبر 1974 إلى يوليو 1975 هي 25.3 بنطا . ويجب ألا نشير إلى هذه الزيادة باعتبارها نسبة مئوية (25.3%) والواقع أن التغير كنسبة مئوية هو

$$\frac{25.3}{113.2} \times 100 = 22.4\%$$

(ب) مقارنة قيم الرقم القياسي التي تستخدم أزمنة أساس مختلفة

إعتبر مرة أخرى المجموعة السابقة من قيم الرقم القياسي ولنفرض أننا نريد أن نقارن الرقم القياسي في أكتوبر 1974 بقيمته في أكتوبر 1973 . ومن الواضح أن المقارنة المباشرة مستحيلة لأن لهذين الرقمين تواريخ أساس مختلفة .

والطريقة الممكنة هي تحويل رقم أكتوبر 1973 إلى يناير 1974 كتاريخ أساس بالقسمة على رقم يناير 1974 المنسوب إلى يناير 1962 كتاريخ أساس . وهكذا نحصل على $185.4 / 191.8 \times 100 = 96.7$.

ويمكن الآن مقارنة هذا الرقم ، بالرقم 1132 الخاص بأكتوبر 1974 مما يتضح معه وجود زيادة قدرها 16.5 بنطا .

(جـ) استخدام الأرقام القياسية كوسيلة للتكميش

في أوقات التضخم يمكن استخدام الأرقام القياسية لعمل المقارنات بالأسعار الحقيقية ، وليس بدلالة النقود ، أو بمعنى آخر يمكن استخدامها كوسيلة للتكميش . وإذا كان المطلوب بحث مستويات الأجور ، فمن المفيد أن نعرف مدى زيادة القوة الشرائية نتيجة لزيادة الأجور على مدى السنين ، وليس مجرد القيمة المطلقة للزيادة في الأجور .

المرتبة بالأسعار 1966	الرقم القياسي لتكاليف المعيشة	المرتبات المتوسطة للموظف	السنة
826	100	826	1966
913	102	931	1967
958	107	1025	1968
973	113	1099	1969
1083	120	1300	1970

وفي المفاوضات السنوية لتحديد الأجور ، فإن ممثلي العمال يحاولون الحصول على نسبة مئوية للزيادة في أجور العاملين الذين يمثلونهم أكبر من النسبة المئوية للزيادة في الرقم القياسي لأسعار التجزئة في العام المنصرم . وهذا ضروري لكي تكون هناك زيادة حقيقية في المرتبات ، أو « تحسن في مستوى المعيشة » .

(د) نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسي

في عام 1976 أنشأت الحكومة نظامين للادخار على أساس الرقم القياسي لأسعار التجزئة وتجرى الدعاية لهذين النظامين باعتبارهما طرقاً للادخار تسمح للمدخر بالمحافظة على قيمة نقوده الحقيقية بالرغم من التضخم ، وأحد هذين النظامين - وهو المخصص لمن يزيد عمرهم على 50 عاماً - يسمح للمدخر بإيداع أى مبلغ حتى £5000 ويمكن استعادته فى أى وقت بعد مرور عام مصححاً بمقدار التضخم . وهذا يعنى أن المبلغ سيضرب فى

الرقم القياسي لأسعار التجزئة فى تاريخ السحب

الرقم القياسي لأسعار التجزئة فى تاريخ الإيداع

أما النظام الآخر ، وهو مقترح للجميع فهو من نوع « ادخر مما تكسبه » . وفيه يودع المدخر أى مبلغ يريد شهرياً حتى £50 كحد أقصى لمدة خمسة أعوام . ويضرب كل مبلغ تم إيداعه فى نهاية مدة الأعوام الخمسة فى :

الرقم القياسي لأسعار التجزئة فى التاريخ النهائى

الرقم القياسي لأسعار التجزئة فى تاريخ الإيداع

وبعد ذلك يكون للمدخر الخيار فى ترك المبلغ المصحح المتجمع فى نهاية الخمسة أعوام لمدة عامين آخرين دون ايداعات جديدة . وفى نهاية العامين سيكون هناك تصحيح لأثر التضخم للمبلغ الاجمالى لمدة العامين بالإضافة الى منحة تصل إلى المبلغ المدفوع فى شهرين .

(هـ) التأمين المرتبط بالرقم القياسي

تشجع معظم شركات التأمين عملاءها على تقليل المخاطرة فى أن تكون مبالغ التأمين على المنازل ومحتوياتها أقل من قيمتها الحقيقية ، وذلك بتصحيح قيمة مبلغ التأمين سنوياً باستخدام الأرقام القياسية المناسبة . وهذا يعنى ضرب مبلغ التأمين فى موعد تجديده فى التغير النسبى فى الرقم القياسي المعنى على مدى العام المنصرم . وبالنسبة للمباني فإن الرقم القياسي المستخدم هو رقم تكاليف البناء . أما بالنسبة لمحتويات المنازل الخاصة فالمعتاد أن يستخدم الرقم القياسي لمجموعة السلع المنزلية ، وهو جزء من الرقم القياسي لمجموعة السلع المنزلية ، وهو جزء من الرقم القياسي لأسعار التجزئة .

(و) محاسبة التكاليف الحالية

فى السنوات الأخيرة أصبحت الأرقام القياسية موضوعاً لاهتمام خاص فى عالم المحاسبة بفضل الحديث عن محاسبة التكاليف الحالية . وقد ساهم فى المناقشات الدائرة فى هذا المجال مساهمة كبيرة التقدير الشهير المعروف باسم تقرير ساند يالاندز . وباختصار فإن الحديث يدور عما إذا كان يجب تصحيح القيمة الدفترية للأصول الثابتة لاستبعاد اثر التضخم باستخدام الأرقام القياسية المناسبة ، وكيفية إجراء هذا التصحيح . ولتسهيل هذه العملية فقد أصدرت الحكومة كتيباً عنوانه « استخدام الأرقام القياسية للأسعار لمحاسبة التكاليف الحالية (PINCCA) » وذلك ضمن مجموعة « دراسات فى الإحصاءات الرسمية » وطريقة عمل التصحيحات بسيطة ومطابقة لما ذكرناه فى التطبيقات الأخرى . وتستعمل كثير من الهيئات الآن محاسبة التكاليف الحالية (CCA) لإظهار الصورة الحقيقية لمواقفها المالية وقد صدر تقرير عن ممارسات المحاسبة القياسية (SSAP 16) برقم لما يتناول محاسبة التكاليف الحالية .

تعرين ١١ - ٣ - ١ : فيما يلي بعض المقتطفات من مقال نشر بجريدة الدبلى تلجراف بتاريخ 21 يناير 1978 .
« استمر معدل التضخم فى الانخفاض فى الشهر الماضى مما جعل هدف الحكومة فى الوصول إلى زيادات فى الأسعار مكونة من رقم واحد ممكن التحقيق فى الشهر القادم أو الشهر التالى » .

« وقد إرتفعت الأسعار فى المتاجر بمقدار 0.5% فى شهر ديسمبر ، وكان هذا هو نفس معدل الزيادة فى الشهر السابق مما خفض المعدل السنوى للتضخم من 13% إلى 12.1% وقد ارتفع الرقم القياسى لأسعار التجزئة إلى 188.4 (يناير 1974 = 100) »

« وقد يشهد هذا الشهر انخفاضاً أكبر فى معدلات ارتفاع الأسعار من سنة لسنة »

« . . . وسيخفض المعدل السنوى للتضخم إلى مايقرب من 10% أوحى أقل من ذلك »

« استمر التضخم سارياً فى الستة شهور الأخيرة بمعدل سنوى مقداره 5.3% »

المطلوب :

(أ) توضيح كيف أنه مع زيادة الأسعار فى المتاجر بمقدار 0.5% فى شهر ديسمبر انخفض المعدل السنوى للتضخم من 13% إلى 12.1% .

(ب) توضيح مايعنيه الرقم القياسى الذى مقداره 188.4 (يناير 1974 = 100) »

(ج) توضيح المقصود بمعدلات ارتفاع الأسعار من سنة لسنة .

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٩)

تعرين ١١ - ٣ - ٢ : الرقم القياسى لأسعار التجزئة هو المؤشر الرسمى للتضخم . ويحصل موظفو الدولة المحالون إلى المعاش على معاشات مرتبطة به . وأكثر من مليون من السيدات الأكبر من 60 عاماً والرجال الأكبر من 65 عاماً لديهم مدخرات طبقاً لنظام « الشهادات الوطنية للإدخار المرتبطة بالرقم القياسى للأسعار من إصدار التقاعد » . كما أن نحو نصف مليون من الأشخاص يدخرون أموالهم طبقاً لنظام « ادخر مما تكسبه » المرتبط بالرقم القياسى وهذه النظم تضمن أن تحتفظ المعاشات والمدخرات بقدرتها الشرائية . ولايصح هذا الضمان فعلاً إلا إذا كان الرقم القياسى يعكس المعدل الحقيقى للتضخم .

وضح مع الأسباب كيف يمكن للرقم القياسى لأسعار التجزئة ، ألا يعكس المعدل الحقيقى للتضخم لهؤلاء المتقاعدين والمدخرين .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

تمارين

١ - ١ : (أ) بين المقصود بالرقم القياسى ، ولماذا تحسب الأرقام القياسية ؟

(ب) يبنى نوع من الأرقام القياسية على المناسيب والنوع الثانى على التجميع . ما هو الفرق بين هذين النوعين ، وماهى مزايا وعيوب كل نوع ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - ديسمبر ١٩٧٧)

١٩- ٢ : تستخدم الأرقام القياسية على نطاق واسع فى الاحصاء التطبيقى . عرف ثلاثة أنواع رئيسية من الأرقام القياسية ، وصف خواص كل نوع بمثال (عدا الرقم القياسى لأسعار التجزئة) معروف لديك .

(م أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٤)

١٩- ٣ : (أ) ماهى العوامل الأساسية التى تؤخذ فى الاعتبار عند تكوين رقم قياسى ؟ اربط ملاحظاتك بالرقم القياسى لأسعار التجزئة .

(ب) أنشئ ارقاما قياسية لأعوام ١٩٧١ و ١٩٧٢ لحافضة الأسهم الموضحة أدناه مستخدما سنة ١٩٧٠ كسنة أساس .

(افترض أن التغيرات مأخوذة من نفس المصدر فى نفس اليوم من سنوات متتالية ، وأنه لم يحدث انتقال لملكية الأسهم)

نوع الأسهم	عدد الأسهم	لبن السهم		
		١٩٧٠ £	١٩٧١ £	١٩٧٢ £
صناعية	350	1.60	1.80	2.00
عطارية	200	4.60	5.00	6.50
استهلاكية مبررة	120	0.50	0.70	0.60
خلافه وملايس	150	0.40	0.40	0.50
متفرقة	160	1.00	0.90	0.50

(م م أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

١١- ٤ : يبين الجدول التالى أرقام الرجال والنساء الذين يلتحقون بالعمل باحدى المؤسسات ومتوسط تكاليف تدريب الفرد من العاملين الجدد على مدى 15 عاما .

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
عدد الرجال	15	20	25	26	46	29	33	35	37	12	37	43	68	41	45
تكاليف تدريب الرجل	6	6	7	7	7	8	10	10	10	20	14	17	25	27	29
عدد النساء	47	49	44	37	14	45	46	48	49	53	55	57	17	58	52
تكاليف تدريب المرأة	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4

• الرتبة من £10

(أ) المطلوب انشاء سلسلة من الأرقام القياسية تمثل تكاليف التدريب فى المؤسسة .

(١) ماهى السنة (أو السنوات) التى تختارها كأساس ولماذا ؟

(٢) ماهى السنة (أو السنوات) التى تمتيرها غير مناسبة كأساس ولماذا ؟

(ب) باستخدام السنة رقم (1) كأساس احسب مايلى للسنة رقم (8) :

(١) منسوب « التكاليف لكل رجل » ومنسوب « التكاليف لكل امرأة »

(٢) الوسط البسيط لمناسيب « التكاليف لكل عامل جيد »

(٣) الوسط المرجح طبقا لفترة الأساس (بالاعداد) لمناسيب « التكاليف لكل عامل جديد » .

(٤) رقم باش القياسى ، ورقم لاسبيرز القياسى « للتكاليف لكل عامل جديد » باستخدام عدد العاملين الجدد ، كأوزان للترجيح .

(جـ) أى الأرقام القياسية المذكورة فى ((ب) - (٤)) أعلاه تعتبره أنسب مقياس للتغير فى تكاليف التدريب

ولماذا ؟

(م) ١١ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٥)

الفصل الثاني عشر

الاحتمالات

١٢ - ١ نظرية الفئات الأساسية

سوف نعرض في هذا الفصل بعض الأفكار الأساسية الخاصة بالفئات تمهيدا لدراسة الاحتمالات . وتعبير فئة يمكن أن يطلق على أى تجمع من الأشياء ، وتعرف مفردات هذه الأشياء على أنها عناصر الفئة . وبوجه عام تكون المفردات في مجتمع تبحث الدراسة لها عن عديد من الخصائص ، وتنقسم المجتمع طبقا لهذه الخصائص تنشأ الفئات .

نفرض ، على سبيل المثال ، أن 200 من العاملين باحدى الشركات منهم 150 من الذكور و 50 من الاناث وأن 40 من الجامعيين و 160 غير جامعيين . نفرض أيضا أن 10 من الاناث جامعيات . في هذا المثال ، يمكننا تكوين عدة فئات طبقا لنوع التقسيم مثل فئة العاملين من الذكور ، والعاملات من الاناث . كما يمكن أيضا اجراء التقسيم باعتبار فئة الجامعيين ، وغير الجامعيين .

ومن الأسئلة التي تجيب عليها نظرية الفئات الأساسية ، كم من المفردات ينتمى الى كل من الفئات المعنية المختلفة ، أو كم من المفردات ينتمى على الأقل إلى فئة من الفئات المعنية المختلفة يمكننا في هذه الحالة أن نسأل :

١ - كم عدد العاملين من الاناث الجامعيات ؟

٢ - كم من العاملين من الاناث أو الجامعيات أو كليهما ؟

لكي نرى كيف تتعامل نظرية الفئات مع هذه الأسئلة نحتاج لادراج بعض المصطلحات . ويرمز للفئات عادة بحروف كبيرة .

أرمز لفئة الاناث بالرمز W وفئة الجامعيين بالرمز G .

عدد الأعضاء في هذه الفئات يرمز لهم بالرمز $|W|$ و $|G|$ ومن ثم $|W| = 50$ و $|G| = 40$.

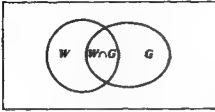
سؤال (١) يسأل عن العدد الذي ينتمى إلى كل من W و G . هذه الفئات تسمى تقاطع W و G ويرمز لها بالرمز

$W \cap G$. وقد أوضحنا في المعلومات السابقة أن $|W \cap G| = 10$.

سؤال (٢) يسأل عن العدد الذي ينتمى إلى W أو إلى G أو إلى كليهما . ويسمى هذا باتحاد W و G ويرمز له

بالرمز $G \cup W$.

شكل ١٢ - ١ . يسمى بشكل فن ، ومساحات الأشكال تمثل رمزيا عدد الأعضاء في الفئات المناظرة .



شكل ١٢ - ١

وبملاحظة الشكل نجد أن $|W| + |G|$ لا تساوي $|W \cup G|$ حيث أن المساحة في التقاطع حسبت مرتين . ومن ثم يجب طرحها مرة . وهذا يعطي القاعدة الهامة :

$$|W \cup G| = |W| + |G| - |W \cap G|$$

وبالتالي في هذا المثال نجد أن :

$$|W \cup G| = 50 + 40 - 10 = 80$$

بمعنى أن 80 من العاملين يكونوا إناثا أو جامعات أو كليهما .

والمكملة للفتة هي إحدى مفاهيم نظرية الفئات الضرورية لدراسة الاحتمالات فالمكملة للفتة تتكون من جميع أعضاء المجتمع الذين لا ينتمون لهذه الفتة . ومن فتي هذا المثال تكون المكملة للفتة W والتي يرمز لها بالرمز \bar{W} هي فتة كل الذكور العاملين

$$|\bar{W}| = 200 - 50 = 150$$

ومن أجل دراسة الاحتمالات في هذا الكتاب لا يلزم القارئ أكثر من هذه المعلومات في نظرية الفئات لدراسة البند ١٢ - ٢ . وبما أن بعض الاختبارات تحتوى على أسئلة في نظرية الفئات ، ومن ثم يختم هذا الفصل بمثال وتمارين من النوع المطروح .

مثال ١٢ - ١ : عاملون لهم حق الاختيار لأحد ثلاث برامج : A, B, C وعليهم أن يعطوا صوته لأحد هذه البرامج ولكن إذا لم يكن لديهم أى تفضيل ، فانهم يعطون صوتهم للثلاثة ، أو إذا كانوا ضد أحد هذه البرامج ، فيعطون صوتهم للآخرين المفضلين .

عينة من 200 من الناخبين أعطت المعلومات التالية :

- 15 أعطوا صوته لـ A و B وليس لـ C
- 65 أعطوا صوته لـ B فقط ،
- 51 أعطوا صوته لـ C فقط ،
- 15 أعطوا صوته لكل من A و B ،
- 117 أعطوا صوته لـ A أو B أو كليهما ، ولكن ليس لـ C ،
- 128 أعطوا صوته لـ B أو C أو كليهما ولكن ليس لـ A .

كم أعطوا صوته لكل من :

(أ) البرامج الثلاثة

(ب) لبرنامج واحد

(ج) A بغض النظر عن B أو C .

(د) A فقط .

(هـ) A و B وليس C .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة نرمز لفئات العاملين الذين أعطوا صوتهم للبرامج A و B و C بالحروف A و B و C على التوالي . الجزء (أ) من السؤال يسأل عن عدد العاملين الذين أعطوا أصواتهم للبرامج الثلاثة . أى كم عدد العاملين فى الفئة $A \cap B \cap C$.

أسهل طريقة للاجابة على هذا السؤال هى رسم شكل فن ، وإيجاد الأعداد فى الفئات المطلوبة من ملاحظة الشكل . وشكل فن لهذا المثال معطى فى شكل ١٢ - ٢ .

(أ) من هذا الشكل نجد أن عدد العناصر فى A على حدة ، أو فى A و B ولكن ليس فى C يكون $52 = 117 - 65$. ومن ثم فإن العدد الذى لا يوجد فى $A \cap B \cap C$ يكون $195 = 52 + 128 + 15$.

ولكن العدد الكلى للعناصر هو 200 . إذن العدد فى $A \cap B \cap C$ يكون $5 = 200 - 195$. أى أنه يوجد 5 عاملين أعطوا صوتهم للبرامج .

(ب) عدد العناصر فى B و C ولكن ليس فى A يكون $12 = 65 - 51 - 128$ ومن ثم فإن عدد العاملين الذين أعطوا صوتهم لأكثر من برنامج يكون $42 = 12 + 15 + 15$.

وعدد العاملين الكلى هو 200 ومن ثم فإن عدد الذين أعطوا أصواتهم لبرنامج واحد فقط هو $42 = 200 - 158$.

(ج) عدد العناصر فى B أو C أو $B \cap C$ ولكن ليس فى A هو 128 والممد الكلى فى A بغض النظر عن B أو C يكون $72 = 200 - 128$.

أى أنه يوجد 72 من العاملين أعطوا صوتهم لـ A بغض النظر عن B أو C .

(د) من بين الـ 72 عامل فى A يوجد 15 فى $A \cap C$ ولكن ليس فى $A \cap B \cap C$ ومن ثم ، فإن العدد فى A فقط يكون $42 = 72 - 15 - 15$.

أى أنه يوجد 42 من العاملين أعطوا صوتهم لـ A فقط .

(هـ) يوجد 15 عنصرا فى $A \cap B$ وكما حصلنا فى (أ) يوجد 5 فى $A \cap B \cap C$ ومن ثم ، فإن العدد فى $A \cap B$ وليس فى $A \cap B \cap C$ يكون $10 = 15 - 5$.

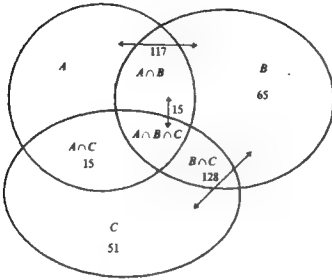
أى أنه يوجد 10 عاملين أعطوا صوتهم لـ A و B ولكن ليس لـ C .

ومجموعة العناصر التى تكون فى الفئة A ولكن ليست فى الفئة B يرمز لها بالرمز $A - B$ وتسمى الفرق للفئتين . ونلاحظ أن $A - B = A \cap B^c$ فاستخدام لغة الفئات يمكن كتابة المعلومات فى المثال السابق على النحو التالى :

$C - (A \cup B)$ تحوى 117 عنصرا .

$A - (B \cup C)$ تحوى 128 عنصرا .

نعرين ١٢ - ١ - ١ آلة تتكون من ثلاثة أجزاء A و B و C . وعندما تم اختبار الآلة تبين أنها تفشل اذا كان هناك خلل فى جزء أو جزئين ، وأحيانا يكون الخلل فى الأجزاء الثلاثة . وتحليل 100 فشل لهذه الآلة وجد 70 خللا للجزء A و 50



شكل ١٢ - ٢

خلال الجزء B ، و 30 خلال للجزء C . وأن 44 مرة كان سبب الفشل خلال في جزئين فقط (بمعنى A و B أو A و C أو B و C) وأن 10 مرات من الـ 44 كانت بسبب خلل في C و B أوجد كم مرة كان الفشل بسبب خلل في :
(أ) كل الأجزاء الثلاثة .
(ب) الجزء A فقط .

وضح اجابتك باستخدام شكل فن .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

٢ - ١٢ تعريفات الاحتمالات

تعريف الاحتمال الذي سوف نتعرض له هو مايسمى بالتعريف الكلاسيكي ، وهو يعتبر الاحتمال بدلالة التكرارات في المدى البعيد . من حيث المبدأ ، وهذا التعريف يجيز احتمالات مرتبطة فقط بتجارب يمكن تكرارها عددا لانتهائى من المرات ، ولكن عمليا الاحتمال الكلاسيكي يمكن تطبيقه في معظم الحالات التى يراد فيها تطبيق الاحتمال . والتعريف الكلاسيكي ينص على أنه اذا تكررت تجربة عدد لانتهائى من المرات يكون الاحتمال لحادثة معينة هو نسبة تكرارات هذه الحادثة . منشأ هذه الفكرة ومعظم تطبيقاتها الواضحة تكون في حالات المقامرة البسيطة مثل رمى العملة ، ودرجة زرد ، ادارة عمجلات الروليت أو سحب أوراق من أوراق اللعب . وسوف نشير إلى قليل من تجارب العملة والنرد لتوضيح بعض الأفكار الأساسية لكن إهتمامنا الرئيسى سوف يوضح بامثلة لاصلة لها بالمحاسبة .

افترض أن لدينا عملة منتظمة بمعنى أن وزن العملة موزع بانتظام فاذا القيت مثل هذه العملة لعدد لانتهائى من المرات ، وكان نصف الرميات ستعطى صورة . اذن حسب التعريف الكلاسيكي للاحتمال يمكننا القول بأن احتمال الحصول على صورة لهذه العملة يكون 0.5 .

وهنا يلزم ادراج رمز موجز للتعبيرات الاحتمالية ، فالتعبير السابق « احتمال الصورة يكون 0.5 » يكتب .

$$P(\text{صورة}) = 0.5$$

افترض أيضا أننا درجنا نردا معتدلا عددا لانهايا من المرات . وكان ثلث المرات سيتج 3 أو 6 ، فمن ثم يمكننا القول بأن احتمال أن كون الرقم قابل للقسمة على 3 هو ثلث

$$\frac{1}{3} = (\text{رقم قابل للقسمة على } 3) P$$

لاحظ أنه يتج من التعريف الكلاسيكي أن مجموعة الاحتمالات المرتبطة بأى تجربة يكون 1 حيث أن أى تكرار (جزء واحد من التكرارات) يجب أن يكون نتيجة حدوث شيء .

وللحالات البسيطة مثل الحالتين السابقتين ، حيث جميع النتائج فى كل تكرار للتجربة تكون متماثلة الحدوث ، فان التعريف القياسى للاحتمال يختصر الى القول بأن احتمال حدوث حدث هو :

$$\frac{\text{عدد نتائج الحدث}}{\text{العدد الكلى للنتائج الممكنة}}$$

فى مثال قطعة النقود توجد نتيجتان ممكنتان . صورة وكتابة .^١ ولذلك

$$P (\text{صورة}) = \frac{1}{2} = 0.5$$

أما فى مثال حجر النرد يوجد ست نتائج ممكنة 1,2,3,4,5,6 ومن هذه النتائج الست توجد قيمتان تناسب الحدث و يقبل القسمة على 3 .^٢ لذلك

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = (\text{رقم قابل للقسمة على } 3) P$$

وعند هذا الحد دعنا ننظر إلى أنه كيف أن أساس نظرية الفئات فى البند ١٢ - ١ يمكن أن يساعدنا فى التعامل مع الاحتمالات . ونحن نهتم فى الاحتمالات بالفئة التى عناصرها هى كل النتائج الممكنة للتجربة تحت الاعتبار ، ونهتم أيضا بالفئة الجزئية الخاصة بالنتائج المناسبة للحدث الذى نريد أن نعرف احتمال . ولهذا فمن الممكن الحصول على شكل توضيحي يمثل فئة جميع النتائج الممكنة للتجربة مع توضيح الفئات الجزئية التى نهتم بمعرفة احتمالاتها . وبدلا من أعداد العناصر ، كما فى الأمثلة بالبند ١٢ - ١ ، فان الأشكال التوضيحية التى تظهر الفئات الجزئية فى هذه الحالة سوف تكون الاحتمالات المناسبة .

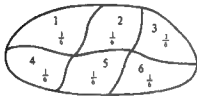
فى مثال قطعة النقود ، نرى فى شكل (أ) ١٢ - ٣ ، أنه توجد نتيجتان ممكنتان ، كل منهما باحتمال 0.5 . وفى مثال حجر النرد ، نرى فى شكل (ب) ١٢ - ٣ ، أنه يوجد ست نتائج ممكنة من بين هذه النتائج توجد النتيجتان 3 و 6 مناسبتان للحدث (يقبل القسمة على 3) .

وباستخدام أشكال فن ، فسوف تساعدنا فى النظر إلى احتمالات الأحداث المركبة والاحتمالات الشرطية ، كما سنرى فى الأجزاء القادمة .

وقبل أن نترك تعريفات الاحتمال فانه توجد كلمة يجب أن نقال عن التعريف الرئيسى الذى يسمى باحتمال بايز . وقد اشتق هذا الاسم من توماس بايز الذى كان من أوائل من نشر أبحاثا فى الاحتمال ولكنه بالتأكيد لم يطور الأفكار المعروفة حاليا باسم احتمال بايز . وقد استفاد بهذه الأفكار انصاليون آخرون ، ونظروا إليها كامتداد منطقي لأفكار بايز . وبايز ينظر إلى احتمال الحدث على أنه « درجة الاعتقاد » بحدوث ، أو عدم حدوث الحدث . ومن الواضح أن درجة الاعتقاد تختلف من شخص لآخر . ولذلك فان هذا أحيانا يشار اليه بالاحتمال الذاتية . ويسمح هذا التعريف بالارتباط بالحالات التى لا يمكن أن يطبق التعريف القياسى للاحتمال لانهم لا يكررون التجارب لعدد لانهايا من

المرات . فمثلا يجب أن نفكر في إحتمال الحياة في الكواكب الأخرى ، إحتمال الحياة بعد الموت ، أو الأكثر شيوعا ، إحتمال أن « هومر » كان أعمى .

وقد بدأ بايز باستخدام درجة الاعتقاد حول شيء ، ربما كعدد ، أو ربما كتوزيع احتمالي . وهذا يسمى « بالاحتمال المسبق » . بعد ذلك يجمع معلومات ويستخدمها ليحسن من درجة اعتقاده . هذا يؤدي إلى الاحتمال اللاحق ثم يمكن جمع معلومات أخرى وعمل تعديل وهكذا . وعندما نصل إلى نظرية بايز في البد ١٢ - ١٠ (والتي سوف نذكرها في سياق الكلام عن الاحتمالات القياسية ، أو الكلاسيكية فاننا سوف نرى كيف يمكن التفكير في إجراء بايز ، وكيف يمكن تنفيذه عمليا واحتمال بايز تعرض للجدل على مر السنين ويكل تأكيد من غير المناسب هنا أن نشغل أنفسنا بالنتائج الفلسفية للمعادلة . وعلى أي الأحوال ، فمن الشائع أن يلاحظ اعتراض أحد الأشخاص اعتراضا على أجابة بايز . ويظن أن الناس ليس لديهم درجة اعتقاد (أو بالتأكيد لا يوجد واحد يمكن تحديده) حول موضوعات كثيرة . ماهي مثلا درجة اعتقادك للحياة على الكواكب الأخرى ، أولمعي « هومر » ؟ بايز أشار في اجابته الى أنه في المواقف العملية ، وخاصة المواقف المالية أن الناس في الحقيقة تملك درجة الاعتقاد حول الأشياء مثل ، الأرباح ، وأسعار الفائدة التي يقبلونها . وفي الحديث عن سياق الخيل تحدث درجات الاعتقاد حول قدرات الحيل المعينة التي تسدد الأرباح المقدمة . وبالتالي فإن هذه الأرباح تكافئ احتمالات بايز .



(ب)



(أ)

شكل ١٢ - ٣

تعمير ١٢ - ٢ - ١ تجد شركة كبيرة عدد من المحاسبين للتدريب كل عام . وفي عام معين ، قدم تسعون طالبا من بينها :

لديهم خبرة عمل سابقة	63
اجتازوا مرحلة الاختبار الأساسي	36
لديهم الخبرة بالعمل واجتازوا مرحلة الاختبار الأساسي وهم ضمن المجموعتين السابقتين .	27

ارسم شكل فن ميينا احتمالات أن المتقدم له :

(أ) خبرة سابقة

(ب) اجتاز الاختبار الأساسي

(ج) الاثنان معا .

(م م ت أ الأساس ب - مايو ١٩٧٩)

١٢ - ٣ قاعدة الجمع

يقال إن الحوادث متنافية بالتبادل ، إذا كان حدوث حدث منهم يعني أنه لا يمكن حدوث أي من الأحداث الأخرى . فإذا رميت قطعة نقود مرة واحدة ، فإن الحدثين « صورة » ، « كتابة » متنافية .

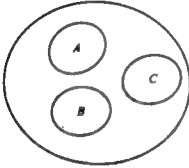
وإذا دحرج حجر نرد مرة واحدة ، فإن الحدثين «خمس» ، «سنة» متنافية .

وعلى أى الأحوال فالحدثان «عدد زوجي» ، «يقبل القسمة على 3» ليست أحداث متنافية لأنه إذا كانت نتيجة الدحرجة ستة فإن الحدثين يحدثان معا .

الحوادث المتنافية بالتبادل تعنى أنه لا يوجد ، زوج منها له ناتج مشترك وبواسطة أشكال فن يكون الحال ، كما هو موضح فى الشكل ١٢ - ٤ . فإذا كانت الحوادث متنافية بالتبادل ، فإن احتمال أن واحدا منها سوف يحدث (وبالتعريف لا يمكن حدوث أكثر من واحد) هو مجموع احتمالات مفرداتها . ومن الشكل ، فإن ذلك يمثل بالحقيقة التى نقول أنه احتمال اتحاد حدثين غير متقاطعين هو مجموع احتمال كل منهما . ولهذا إذا كان A و B حدثين متنافيين ، فإن قاعدة الجمع للحوادث المتنافية هي

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال ١٢ - ٣ - ١ دحرج حجر نرد منتظم مرة واحدة . ماهو احتمال الحدث خمسة ، أوعددا زوجيا ؟



شكل ١٢ - ٤

الاجابة (رقم زوجي) P (خمس) $= P$ (خمس) $+ P$ (رقم زوجي \cup خمس) P

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

فى حالة ما إذا كانت الأحداث غير متنافية بالتبادل اعتبر شكل ١٢ - ٥ . وافترض مرة أخرى إننا نريد إيجاد $P(A \cup B)$ ، احتمال حدوث A أو B . فى هذه الحالة لدينا امكانية أن A و B يحدثان فى نفس الوقت . وإذا جمعنا احتمال كل النواتج فى A إلى احتمال كل النواتج فى B سوف نكون أدخلنا قيمة احتمال النواتج المشتركة لكل من A و B مرتين . إذن احتمال حدوث A و B معا يجب أن يطرح . وهذا يعطى قاعدة الجمع العامة :

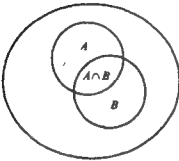
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال ١٢ - ٣ - ٢ : دحرجت زهرة نرد معتدلة مرة واحدة ، فما هو احتمال الحصول على عدد زوجي ، أو عدد قابل للقسمة على 3 ؟

الاجابة :

$$\begin{aligned}
 & P(\text{رقم قابل للقسمة على 3 و رقم زوجي}) = \\
 & = P(6) = P(\text{رقم قابل للقسمة على 3}) + P(\text{رقم زوجي}) - P(6) \\
 & = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\
 & = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

تمرين ١٢ - ٣ - ١ استخدم نفس المنطق السابق للحصول على صورة عامة لـ $P(A \cup B \cup C)$.



١٢ - ٤ قاعدة الضرب

تسمى الأحداث مستقلة إذا كان حدوث أى منها ليس له أى تأثير على احتمالات حدوث أى من الأحداث الأخرى .
كمثال للأحداث المستقلة افترض أننا رمينا قطعة نقود ، ودرجنا حجر نرد . ما يحدث بالنسبة لقطعة النقود ليس له أى صلة بما يحدث للنرد ومن ثم فإن الحدثين « صورة فى قطعة النقود » ، و « 6 فى حجر النرد » ، سوف يكونان حدثين مستقلين . وإذا كانت الأحداث مستقلة ، فإن احتمال حدوثها جميعا يكون حاصل ضرب احتمالاتها الفردية .

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

وبالنسبة للمثال السابق فإن هذه القاعدة تعطى :

(6 فى النرد \cap صورة فى قطعة النقود) P .

$$\begin{aligned}
 & = P(6 \text{ فى النرد}) \times P(\text{صورة فى قطعة النقود}) \\
 & = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

ونتيجة هذا المثال يمكن التأكد منها من المبادئ الأولية . وبما أن التجربة لها 12 من النواتج الممكنة لهم نفس فرصة الحدوث :

H1 H2 H3 H4 H5 H6 T1 T2 T3 T4 T5 T6

إذن احتمال الحدث المعين H6 يكون $\frac{1}{12}$.

وبوجه عام قاعدة الضرب للأحداث المستقلة لها أهمية كبيرة باستخدامها مع قاعدة الجمع فى البند ١٢ - ٣ .

مثال ١٢ - ٤ - ١ وحدة تصنع على ثلاث مراحل : فى المرحلة الاولى تشكل فى واحدة من أربع ماكينات A, B, C ، و D بنفس الاحتمال . وفى المرحلة الثانية تشلب فى واحدة من ثلاث ماكينات E, F, G ، بنفس الاحتمال . وأخيرا

تلمع في واحدة من ماكيتي تلمع H و I حيث التلمع في I له ضعف احتمال التلمع في H لأنها تعمل بضعف سرعتها . ماهو احتمال أن الوحدة تكون :

(أ) لمعت في H ؟

(ب) تشذب في F أو G ؟

(ج) صنعت في A أو B ، شذبت في F ولمعت في H ؟

(د) اما صنعت في A ولمعت في I أو صنعت في B ولمعت في H ؟

(هـ) صنعت في A أو شذبت في F ؟

(جدم - م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٥)

الاجابة

$$(أ) \quad P(H) + P(I) = 1 \quad \text{بما أن الوحدة لابد أن تلمع في } H \text{ أو } I$$

$$P(I) = \frac{1}{2}P(H) \quad \text{بما أن لها ضعف احتمال التلمع في } H .$$

$$P(H) + \frac{1}{2}P(H) = 1$$

$$\frac{3}{2}P(H) = 1$$

أي أن

ومن ثم $P(H) = \frac{2}{3}$. أي أن احتمال أن الوحدة تلمع في H يكون $\frac{2}{3}$.

(ب) ماكيتات التشذيب الثلاث لهم نفس الاحتمال في الاستخدام . اذن

$$P(E) = P(F) = P(G) = \frac{1}{3}$$

وأيضاً $P(G \cup F) = P(G) + P(F)$ بما أن الماكيتات متنافية بالتبادل . اذن

$$P(G \text{ أو } F) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(ج) ماكيتات التشكيل الأربع لها نفس الاحتمال في الاستخدام ، ومن ثم

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(شكلت في A أو B شذبت في F ولمعت في H)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

حسب قاعدة الضرب بما أن الماكيتات المستخدمة في مراحل مختلفة تكون مستقلة .

(د) حسب قاعدة الجمع (المتنافي بالتبادل) $P[(A \cap I) \cup (B \cap H)] = P(A \cap I) + P(B \cap H)$

$$= P(A)P(I) + P(B)P(H)$$

حسب قاعدة الضرب

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(و) حسب قاعدة الجمع العامة $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$

$$\begin{aligned} & \text{حسب قاعدة الضرب} \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A)P(F) \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ & = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

مثال ١٢ - ٤ - ٢ وجد وكيل تأمين أنه بمتابعة الاستسلام عن العميل ، يكون احتمال بيع وثيقة تأمين هو 0.4 . ما إذا كان في يوم معين لدى الوكيل عميلان مستقلان فما هو احتمال أن :

(أ) يؤمن على العميلين ؟

(ب) يبيع وثيقة واحدة فقط ؟

(ج) يبيع وثيقة واحدة على الأقل ؟

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٧)

الاجابة:

(أ) (بيع للثاني A بيع للأول) = P (بيع للثاني) = P

حسب قاعدة الضرب = P (بيع للثاني) × P (بيع للأول)

$$= 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

(ب) (بيع للثاني U عدم بيع للأول) U (عدم بيع للثاني ∩ بيع للأول) = P (بيع واحدة فقط)

حسب قاعدة الجمع = P (بيع للثاني U عدم بيع للأول) + P (عدم بيع للثاني ∩ بيع للأول)

$$= 0.4 \times 0.6 + 0.4$$

$$= 0.24 + 0.24$$

$$= 0.48$$

(ج) حسب قاعدة الجمع (بين اثنين) = P (بيع واحدة فقط) + P (بيع على الأقل واحدة)

$$= 0.48 + 0.16$$

$$= 0.64$$

تمرين ١٢ - ٤ - ١ تعرض وحدة منتجة بواسطة شركة لنوعين من العيوب A و B احتمال أن الوحدة بها عيب A هو $\frac{1}{2}$ احتمال أن بها عيب B هو $\frac{1}{3}$ وذلك بغض النظر إذا كان بها العيب A . احسب احتمال أن الوحدة بها :

(أ) كلا العيبين A و B ،

(ب) عيب واحد فقط A أو B ،

(ج) لا عيب .

ماهي العلاقة البسيطة الموجودة بين اجاباتك لـ (أ) ، (ب) ، و (ج) ؟

(ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٩)

تمرين ١٢ - ٤ - ٢ بدأت في نفس الوقت عمليتان مستقلتان A و B الوقت الذي تأخذه أى عملية غير معروف بالذقة ، ولكنه بالاحتمالات معطى كما يلي :

عملية A		عملية B	
الزمن (أيام)	الاحتمال	الزمن (أيام)	الاحتمال
2	0.5	1	0.1
3	0.3	2	0.2
4	0.2	3	0.5
		4	0.2

أحسب احتمال أن :

- كلا من A و B يتهيان في خلال 3 أيام
- كلا العمليتين يتهيان في خلال 3 أيام ، ولكن ليس في يومين .
- كلا العمليتين يتهيان في نفس الوقت .
- العملية B تنتهي قبل العملية A .

(جدم - الأساس بهـ - ديسمبر ١٩٧٨)

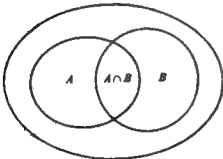
١٥ - • نظرية بايز

الاستقلال والتنافي بالتبادل يمكن اعتبار الواحد نقيض الآخر . إذا كانت الأحداث مستقلة فإن حدوث أى منها لا يؤثر على احتمالات حدوث الآخرين . وإذا كانت الأحداث متنافية بالتبادل ، فإن حدوث أى منها له تأثير مثير جوا على احتمالات حدوث الآخرين : أنه يلغى حدوثها وفي هذا الجزء سوف نعتبر حالة وسطى حيث حدوث حدث ما يؤثر بعض الشيء في احتمال حدوث حدث آخر باحتمال لايساوى الصفر . وهذا هو الاحتمال الشرطى . نحن نشير إلى احتمال حدث A فرضا ، بشرط حدث آخر B (يسمى الحدث الشرطى) قد تحقق .

والتعبير المتبع لهذا الاحتمال يكون $P(A|B)$ (تقرأ احتمال A بشرط B)

ولكى يمكننا فهم كيفية تعريف هذا النوع من الاحتمالات أنظر شكل ١٢ - ٦ . ونحن نريد معرفة احتمال حدوث الحدث A إذا كان معلوما أن B قد تحقق . ولأن B قد تحقق فإن النواتج الوحيدة الممكن حدوثها هي الموجودة في الفئة B . إذن A يمكنها أن تحدث فقط إذا كان لدينا ناتج موجود في كلا A و B أى أن (ناتج في $A \cap B$) وفرصة حدوث هذا في فرصة الناتج $A \cap B$ كنسبة من كل النواتج B الممكنة التى تحققت . إذن الاحتمال الشرطى لـ A بشرط B يعرف كالآتى :-

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



شكل ١٢ - ٦

مثال ١٢ - ٥ : تشير السجلات لأحد المناجم إلى أن احتمالات غياب أحد العمال يوم الاثنين أو يوم الجمعة أو كل من الاثنين والجمعة هي على التوالي 0.4 , 0.2 و 0.1. احسب احتمال أن عامل المنجم سيتغيب يوم الجمعة بشرط أنه كان متغيباً يوم الاثنين .

(م ١١ - الجزء الأول - ديسمبر ١٩٧٧)

الاجابة :

$$P(\text{الاثنين} \mid \text{الجمعة}) = \frac{P(\text{الاثنين} \cap \text{الجمعة})}{P(\text{الاثنين})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

ونظرية بايز هي نتيجة نحصل عليها من تعريف الاحتمال الشرطي ، وتسمح لنا أن نعبر عن احتمال شرطي بدلالة عكس الاحتمال الشرطي . وهذا عادة ما يكون مفيداً في استخدامه كما سنرى في الامثلة التالية :
لقد رأينا التعريف

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (١ - ١٢)$$

وبإبدال الحروف يمكننا أن نكتب :

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (٢ - ١٢)$$

من (٢ - ١٢) يتج أن :

$$P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A) \quad (٣ - ١٢)$$

ولكن $P(A \cap B)$ هي نفس الشيء مثل $P(B \cap A)$. ومن ثم يمكننا أن نعوض في (١ - ١٢) فنحصل على :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \quad (٤ - ١٢)$$

هذه صورة ابتدائية لنظرية بايز .

والنص المعتاد لنظرية بايز يكون باعتبار A واحدة من عدد من الأحداث المتنافية بالتبادل ، والتي تحتوي جميع النواتج . وكثيراً ما يوجد حدثان A و \bar{A} .

وفي سبيل صياغة النظرية بطريقة أعم ، افترض أنه يوجد أربعة من مثل هذه الأحداث A, X, Y, Z هذه الحالة موضحة في شكل ١٢ - ٧ ويمكننا إذا أردنا تجزئها إلى أربعة أجزاء مثل

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap X) \cup (B \cap Y) \cup (B \cap Z)$$

الأجزاء الأربعة متنافية بالتبادل ، ومن ثم قاعدة الجمع تعطى

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap X) + P(B \cap Y) + P(B \cap Z)$$

والمحدود في الطرف الأيمن يمكن إعادة كتابتها للاستخدام (١٢ - ٣) لنحصل على

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|X)P(X) + P(B|Y)P(Y) + P(B|Z)P(Z)$$

وبالتعويض في المقام في الطرف الأيمن لـ (١٢ - ٤) نحصل على نظرية بايز في الصورة :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|X)P(X) + P(B|Y)P(Y) + P(B|Z)P(Z)}$$

وفي حالة الاستخدام المعادى حيث يكون التجزء الى A و \bar{A} تتحول العلاقة إلى

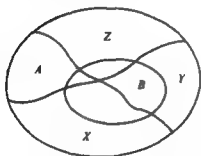
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

والصورة العامة لنظرية بايز تعتبر التجزء الى أحداث متنافية بالتبادل وشاملة للأحداث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ وتنص على

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

ومن هذه النصوص لنظرية بايز على مستويات مختلفة من التعميم نستطيع إدراك بعض مفاهيم احتمال بايز ، كما هو مشار اليه في البند ١٢ - ٢ . أن $P(A)$ هو احتمال سابق لحدوث الحدث A . والملاحظات تدون في أثناء حدوث B .

ونحن نعلم أن $P(B|A)$ هي احتمال حدوث B اذا A تحققت . كما نعلم أيضا أن الاحتمال الشرطي لحدوث B بشرط تحقق جميع الأحداث عدا A ولدنيا الاحتمالات السابقة لهذه الأحداث . وبإدخال جميع هذه الاحتمالات الشرطية ، والاحتمالات السابقة معا في صيغة نظرية بايز نحصل على الاحتمال التابع $P(A|B)$ للحدث A بشرط تحقق B .



شكل ١٢ - ٧

مثال ١٢ - ٥ - ٢ : شركة بترول تنقب في بحر الشمال قدوت أنها ستنتج في إيجاد بترول بكميات اقتصادية في حقل ما باحتمال 60% وبعد اجراء أول تنقيب اختبارى كانت النتائج مرضية .

واذا فرض أن 0.3 هي قيمة احتمال أن التنقيب الاختبارى يعطى نتيجة خاطئة فما هو الاحتمال المعدل باستخدام نظرية بايز لإيجاد كميات اقتصادية من البترول ؟

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٧)

الاجابة : باستخدام الرموز السابقة ، سوف نستخدم الرمز A لنشير إلى أنه يوجد بترول ، والرمز B لنشير إلى أن التنقيب سيكون موفقا .

هذه الحالة بها حدثان فقط ، أما أن يوجد بترول A أولا يوجد بترول A

المطلوب إيجاد (تنقيب موفق | بترول) P . والاحتمال السابق للبترول يكون $0.6 = P$ (بترول) ومن ثم $0.4 = P$ (لا بترول) . وحيث أن احتمال التنقيب يعطى نتيجة خاطئة هو 0.3 يمكننا استنباط الاحتمالات الشرطية اللازمة لنظرية بايز .

$$0.3 = P(\text{لا بترول} | \text{تنقيب موفق}) \text{ و } 0.7 = P(\text{بترول} | \text{تنقيب موفق})$$

ومن ثم باستخدام نظرية بايز في الصورة

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

نجد أن

(تنقيب موفق | بترول)

$$= \frac{P(\text{بترول}) \cdot P(\text{بترول} | \text{تنقيب موفق})}{P(\text{بترول}) \cdot P(\text{بترول} | \text{تنقيب موفق}) + P(\text{لا بترول}) \cdot P(\text{لا بترول} | \text{تنقيب موفق})}$$

$$= \frac{0.7 \times 0.6}{0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4} = \frac{0.42}{0.42 + 0.12} = 0.78$$

تمرين ١٢ - ٥ - ٨ في شركة مايدون نويات الغياب عن العمل بدلالة فترة (ثلاثة أيام أو أقل ، أكثر من ثلاثة أيام) مع وجود شهادة طبية من عدمه . وفي قسم ما إحتمال أن تستمر نوبة الغياب أكثر من ثلاثة أيام يكون 0.4 وإحتمال صرف شهادة طبية إذا استمرت نوبة الغياب أكثر من ثلاثة أيام يكون 0.75 وعلى أى الأحوال إذا كانت مدة التغيب ثلاثة أيام أو ، أقل ، فإن إحتمال صرف شهادة طبية يكون 0.1 .

وإذا علم أن الشهادة الطبية قد صرفت ، أوجد باستخدام نظرية بايز أن مدة التغيب استمرت أكثر من ثلاثة أيام .

تمرين ١٢ - ٥ - ٩ آلة الكترونية تتكون من جزئين A و B .

$$P(A \text{ يعطل}) = 0.2$$

$$P(A \text{ يعطل} | B \text{ يعطل}) = 0.75$$

$$P(A \text{ لا يعطل} | B \text{ يعطل}) = 0.15$$

أوجد :

$$(أ) P(B \text{ يعطل} | A \text{ يعطل})$$

$$(ب) P(B \text{ لا يعطل} | A \text{ يعطل})$$

١٢ - ٦ التباديل والتوافيق

في هذا الجزء سوف نهتم بعدد الطرق التي يمكن أن نختار بها أشياء من ضمن فئة كبيرة أو عدد الطرق التي يمكن أن ترتب بها . وسنهتم أولا بالتباديل ، ثم بالتوافيق ، وأخيرا بمسائل عامة تحوى اختبارات وترتيبات ، تجسد الأفكار

الأساسية . وهذا الموضوع هام جدا بالنسبة للاحتمالات ، كما سنرى عند دراسة توزيع ذى الحدين فى الفصل الرابع عشر .

بداسة التبديل (أو الاختيارات كما تسمى أحيانا) نحن نفكر فى حالة حيث جميع ترتيبات الأشياء تختبر مختلفة من بعضها البعض ، أى أن جميعها متميز . افترض أن لدينا n من العناصر . ونريد معرفة بكم طريقة مختلفة يمكننا اختيار فئة مكونة من r من العناصر . هذا هو عدد التبديل لـ r من n ويرمز لها بالرمز nPr

العنصر الأول يمكن اختياره بـ n طريقة . وهذا العنصر لا يكون متاحا اختياره فى الاختيار الثانى . إذن يوجد $(n-1)$ طريقة يمكن أن يختار بها العنصر الثانى . ومن ثم فإن عدد الأزواج المختلفة التى يمكن أن تظهر كأول عنصرين هى

$$n \times (n-1)$$

والآن يوجد عنصران غير متاحين ، والعنصر الثالث يمكن اختياره بـ $(n-2)$ من الطرق . ومن ثم فإن عدد المجموعات المختلفة المكونة من ثلاثة عناصر ، والتى يمكن أن تظهر كأول ثلاثة عناصر فى مجموعتنا المختارة هى

$$n \times (n-1) \times (n-2)$$

وبالاستمرار بنفس المنطق إلى اختيار r من العناصر نجد أن عدد المجموعات الممكنة المختلفة المكونة من r من العناصر هى

$$nPr = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times [n-(r-1)]$$

وهذا ممكن كتابته بصورة أكثر اناقة إذا أدخلنا رمز المضروب .

الرمز $n!$ وتقرأ « مضروب n » وتعنى n مضروبة على التوالى باعداد صحيحة أقل من التى تسبقها حتى 1 . فعلا

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{ويوجه عام :}$$

(لاحظ الاتفاق الخاص $0! = 1$) والتى لانتج فى التعريف العام للمضروب . والاتفاق $0!$ يمكن أن يكون مفيدا فى حسابات توزيعات ذات الحدين والبايوسون . أنظر الفصل الرابع عشر) . وبالرجوع إلى التعبير nPr يمكننا إذا أردنا كتابته فى الصورة

$$nPr = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times [n-(r-1)] \times (n-r) \times [n-(r+1)] \times \dots \times 2 \times 1}{(n-r) \times [n-(r+1)] \times \dots \times 2 \times 1}$$

ومن ثم باستخدام صيغة المضروب نحصل على :

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ١٢ - ٦ - ١ : خلال فترة عمل معينة بتوقيع مراجع انهاء العمل فى أربع مجموعات حساية ذات حجم خاص . فلذا كان للية ثمانى مجموعات حساية ، فكم متتابعة مختلفة من أربع يمكنه العمل بها فى الفترة الأولى ؟

الاجابة : عدد المتتابعات هو :

$$8P4 = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

تمرين ١٢-٦-١ : طالب عليه أن يجيب على ستة أسئلة من تسعة في امتحان . كم متابعة مختلفة مكونة من ستة يمكن أن تظهر في ورقة إجابته ؟

في دراسة التوافيق (أو الترتيبات كما تسمى أحيانا) نحن نفكر في حالة تكوين فيها التنظيمات المختلفة لعناصر نفس المجموعة غير متميزة . والتوافيق تكون غالبا أكثر فائدة لنا عن التباديل .

أما في نص المثال ١٢-٦-١ : فسوف يكون اهتمامنا معالجة بالتوافيق أكثر من التباديل إذا كان السؤال على صورة ، كم مجموعة مختلفة من الحسابات يمكن العمل بها في الفترة الأولى ، وليس كم متابعة مختلفة .

لنفترض أننا رمزنا للحسابات بالرموز $A B C D E F G H$. وبالسؤال عن المتابعات المكونة من أربع ، فإن المتابعات

$B D F G$

$D B G F$

$B F G D$

$D G B F$

$F B D G$

تكون جزءا من المجموع 1680 الذي حصلنا عليه . غير أن ، هذه المتابعات مع باقي الترتيبات الأخرى تعتبر كمجموعة واحدة عناصرها مكونة من أربعة حسابات يمكن العمل بها . وبالمثل أي مجموعة أخرى مكونة من أربع حسابات تولد عددا من المتابعات مساو لعدد الطرق التي يمكن بها ترتيبها فيما بينها .

أما بالنسبة لإيجاد عدد المجموعات المختلفة التي يمكن العمل بها فيطلب منا أن نقسم العدد الكلي للمتابعات على عدد المتابعات التي تولد من كل مجموعة . وعليه فإن العدد الذي ترتب بها العناصر الأربعة فيما بينها هي

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

ومن ثم فإن عدد المجموعات المختلفة من الحسابات الأربعة التي يمكن العمل بها تكون $1680 / 24 = 70$.

ويوجه عام فعدد الطرق لاختيار r وحدة من بين n إذا كانت نفس المجموعة بتنظيمات مختلفة تحسب مرة واحدة فقط نحصل عليه بقسمة عدد الاختيارات nPr على $r!$ وهو عدد الطرق التي ترتب بها كل فئة مكونة من r وحدة . وهذا يسمى بعدد التوافيق لـ r وحدة من n وحدة ويرمز لها بالرمز nCr ونرى أن

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ١٢-٦-٢ : طالب عليه أن يجيب على خمسة أسئلة من سبعة أسئلة في إمتحان .

(أ) بكم طريقة يمكن اختيار اسئلته ؟

(ب) إذا كان عليه أن يجيب على السؤالين الأولين ، وبكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مكونة من خمسة للإجابة عليها ؟

(ج) بكم طريقة يمكن عمل اختياره إذا كان عليه أن يجيب على الأقل على ثلاثة أسئلة من الأربع أسئلة الأوائل ؟

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٨)

الإجابة :

(أ) (المعتبر هنا ، ليس كما في التمرين السابق ، وهو كم مجموعة مختلفة من الأسئلة يمكن للطالب حلها . والتنظيم

ومكنا

كل صف في المثلث نحصل عليه من الصف الذي يسبقه يجمع أزواج الأرقام المتجاورة ، وكتابته المجموع بينهما في الصف الذي تحته . وللتأكد من فهمك للقاعدة يمكنك تكوين الصفيْن التاليين . الصف التالي للصف الأخير يكون 1,8,28,56,70,56,28,8,1 .

ولايجاد C_r نذهب إلى الصف n من المثلث ، ونأخذ العدد الذي على يساره r من الأعداد . وهنا نوجد الأعداد C_r المتضمنة في المثال السابق بهذه الطريقة
 C_7 هو العدد في الصف 7 والذي على يساره 5 أرقام . ويكون 21 .
 C_5 هو العدد في الصف 5 والذي على يساره 3 أعداد . ويكون 10 .
 C_3 هو العدد في الصف 3 والذي على يساره عدد 1 . ويكون 3 .
 C_2 هو العدد في الصف 3 والذي على يساره 2 . من الأعداد ويكون 3 .

تمارين

١٢ - ١ شركة تدرس النتائج المتوقعة ، وهي تخطط لتسويق منتج جديد . وكجزء من دراستها قدرت احتمالات دخول شركات أخرى منافسة في السوق بمنتجات لها . وتعتقد أن احتمال أن المنافس A يدخل السوق هو 60% والمنافس B هو 30% والمنافس C هو 10%
 والمطلوب منك حساب الاحتمالات الآتية :

- (١) لن يدخل السوق أى منافس .
- (٢) A و C ولكن ليس B سوف يدخلان كمنافسين
- (٣) سوف يكون هناك منافس واحد .

(م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٧)

١٢ - ٢ شركة تصنع وحدات باستخدام القيمة العظمى لثلاث عمليات مختلفة هي تشكيل وطلاء وصقل . ويمكن حدوث عيب للوحدة في أثناء أى من هذه العمليات وهذا العيب يصنف أما ثانوى ، أو رئيسيا . والجدول التالي يعطى احتمالات حدوث عيب للوحدة في أثناء كل من العمليات الثلاث ، التي تكون مستقلة .

عيب واحد رئيسي	عيب واحد ثانوى	لا عيوب	صلبة
0.10	0.20	0.70	تشكيل
0.20	0.10	0.70	طلاء
0.15	0.20	0.65	صقل

المطلوب :

ماهو احتمال أن وحدة مرت بالعمليات الثلاث تحتوى على :

- (١) لا عيوب ؟
- (٢) عيب واحد ثانوى ، واثنان رئيسيان ؟
- (٣) عيبان غير محددى النوع ؟

(م م ب - الأساس ب - يونيو ١٩٧٧)

١٢ - ٣ النتائج التالية تم الحصول عليها من سؤال 500 شخص بدلوها سياراتهم منذ وقت قريب ، والسيارات صنفـت أما كبيرة ، أو متوسطة ، أو صغيرة الحجم تبعا لطولها .

حجم السيارة السابقة	حجم السيارة الحالية			المجموع
	كبيرة ($> 15'$)	متوسطة ($13' - 15'$)	صغيرة ($< 13'$)	
كبيرة	75	47	22	144
متوسطة	36	75	69	180
صغيرة	11	63	102	176
المجموع	122	185	193	500

المطلوب :

- (١) ماهى نسبة الناس فى المسح الاحصائى الذين غيروا سياراتهم
(i) سيارة أصغر ؟
(ii) سيارة أكبر ؟

(٢) ماهو تأثير لمثل عادات تغيير السيارات عامة على حجم السيارة التى يرغب فى اقتنائها فى المستقبل ؟
(٣) ماهو احتمال أن شخصا ما اختير عشوائيا ، واشترى عربة كبيرة سابقا رغم أنه كان يمتلك عربة صغيرة ، أو متوسطة ؟

(ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٦)

١٢ - ٤ عملية تسليم وحلة لشركة من أحد الموردين يستغرق أسبوعا ، أو أسبوعين أو ثلاثة أسابيع من تاريخ الاتفاق . وفى المتوسط 20% من التسليمات يأخذ أسبوعا 50% تأخذ أسبوعين 30% يأخذ ثلاثة أسابيع . الشركة تستخدم اما وحدة ، أو وحدتين كل اسبوع باحتمالات 0.6 , 0.4 على التوالى . العدد المستخدم فى أسبوع واحد لا يعتمد على العدد المستخدم فى الأسابيع السابقة .

المطلوب :

- (١) (i) ماهو احتمال أن التسليم من المورد يأخذ اسبوعين ، أو أطول ؟
(ii) بشرط أن الشركة لم تستلم شيئا فى الأسبوع الأول بعد الاتفاق . احسب احتمال أنها سوف تستلم خلال الأسبوع الثانى ، وفسر أجابتك .
(iii) احسب احتمال أن الشركة تستخدم :
(أ) ثلاث وحدات فى أسبوعين ،
(ب) أربع وحدات فى أسبوعين .
(٢) إذا كانت الشركة لديها وحدتين مخزونتين عندما تم أمر التسليم احسب احتمال أن الشركة سوف لا تملك مخزوننا كافيا يقابل الانتاج قبل وصول التسليم .

(ج م م - الأساس ب : يونيو ١٩٨٠)

الفصل الثالث عشر

تحليل نظرية القرارات

١٣ - ١ تكوين القرارات التي تتضمن شكاً :

اتخاذ القرارات في مجال الأعمال عملية بالغة التعقيد تتضمن تجميع كم كبير من المعلومات المختلفة الكيفية والكمية ، واستخدامها استخداماً ذكياً . ولأشك أن البراعة في هذا المجال تتطلب قدراً كبيراً من الخبرة في كل نواحي الأعمال ، وبالتالي فإن أعداد القاريء ليقوم باتخاذ القرارات بكفاءة يخرج عن نطاق هذا الكتاب . وقد وضعنا لأنفسنا هدفاً أكثر تواضعاً ، وهو تزويد القاريء بطريقة مفيدة للتفكير في ماهية عملية اتخاذ القرارات وتعريفه ببعض الأساليب الشائعة للمعاونة في حل تلك المسألة وخاصة في مجال المال والاقتصاد . ويمكن دراسة بنیان عملية اتخاذ القرارات من خلال العناصر الأربعة التالية :

(أ) الأهداف

أولاً : يجب أن يكون واضحاً لمتخذ القرار ما يريد تحقيقه كنتيجة لقراره . وفي مجال المال والاقتصاد يكون الهدف عادة هو تحقيق أقصى ربح . ومع ذلك فليس هذا هو الهدف الوحيد الذي قد يكون لدى متخذ القرار . ومن أمثلة الأهداف الأخرى تحقيق أكبر نصيب في السوق ، أو تحقيق أكبر دخل ممكن . وقد تتعارض هذه الأهداف فيما بينها . وعلى سبيل المثال فقد نجعلنا المنافع البعيدة المدى للمحصل على نصيب كبير في السوق نقبل بربح أقل على المدى القريب . ومن أهم جوانب عملية إتخاذ القرارات حل التناقضات من هذا النوع للوصول إلى أهداف واضحة .

(ب) الاستراتيجية

بعد أن وضعنا الأهداف تكون الخطوة التالية هي دراسة الوسائل التي يمكن اتباعها لتحقيق تلك الأهداف . ويسمى الوسائل الممكنة لتحقيق الأهداف بالاستراتيجيات المتاحة . وقد تكون هذه الاستراتيجيات مجموعة من قرارات الاستثمار أو قد تكون قراراً بإنتاج ، أو عدم إنتاج منتج جديد أو إدخال ، أو عدم إدخال نظام جديد لأجور عمال الإنتاج . ومن المهم التفكير جيداً في كل الاستراتيجيات الممكنة في موقف معين قبل اتخاذ قرار باختيار أحدها .

(ج) الشك

لو كان متخذ القرار يعلم عن يقين الظروف التي ستسود عند تنفيذ استراتيجيته المختارة لزال الجزء الأكبر من صعوبة عملية اتخاذ القرارات . ولو كنا نعلم جيدا المناخ الاقتصادي الذي سيسود في المستقبل لأصبح من السهولة بمكان اتخاذ قرار بشأن الاستثمار في معدات جديدة أو عدمه . وتهدف للكترة الغالبة من التنبؤات الاقتصادية حاليا إلى معاونة الناس على اتخاذ القرارات . وبالمثل يسهل تحديد سعر أى منتج جديد لو كانت نوايا المنافسين معروفة . وتسمى الظروف المختلفة التي قد تسود « بحالات الطبيعة » وتستعمل كلمة « مخاطرة » بمعنى خاص في هذا المقام . ويقال أن موقفا ما به مخاطرة ، وليس مجرد شك اذا أمكن تحديد احتمالات حالات الطبيعة المختلفة التي يمكن أن تسود . ويمكن الوصول الى تقدير لتلك الاحتمالات بواسطة الأبحاث الاحصائية للسوق أو تحليل أرقام المبيعات على سبيل المثال .

(د) الفوائد

لتقدير فعالية أو فائدة الاستراتيجيات المختلفة لتحقيق الأهداف في ظل الشك القائم حول حالات الطبيعة يجب أن يكون لدينا مقياس لما تستطيع الاستراتيجية تحقيقه . وفي مجال المحاسبة فإن هذا المقياس عادة مايكون ماليا . وستتناول في الأمثلة الواردة في الكتاب تقييم الاستراتيجيات ماليا . ومع ذلك فهناك حالات قد لا تكون الأهداف فيها مالية ، وإنما تكون متعلقة برضا العملاء ، أو صحة العاملين . وفي هذه الحالات يلزم قياس فائدة الاستراتيجية لتحقيق الأهداف بمقاييس غير مالية . وحتى لو كانت الفائدة مالية ، فإن الوصول إلى رقم يعبر عن مدة فائدة الاستراتيجية ليس بالأمر السهل . ويصبح الأمر أعقد اذا كانت الفائدة غير مالية . وتنعكس المقاييس المختلفة التي تفضل على أساسها إحدى الاستراتيجيات على غيرها - وستتناول في أجزاء تالية من هذا الفصل - الطرق المختلفة الممكنة لقياس الفائدة .

١٣ - ٢ القيم المتوقعة

من الطرق الشائعة لقياس فائدة إحدى الاستراتيجيات استخدام القيمة المالية المتوقعة لها ، ويرمز لها بالرمز المختصر EMV وسنركز اهتمامنا أساسا على هذه الطريقة . وقبل أن نناقش هذا المقياس ، وطريقة استخدامه في مسائل اتخاذ القرارات سنتناول بصفة عامة فكرة القيمة المتوقعة ، وهي فكرة هامة في حد ذاتها حيث أنها تستخدم في مجالات عديدة وليس لمجرد اتخاذ القرارات .

لنتبر تجربة لها عدة نتائج محتملة الحدوث ، وكل نتيجة ترتبط بها قيمة معينة لأحد المتغيرات . ومن الأمثلة البسيطة لمثل هذه التجربة لقاء زهرة طاولة غير منحازة والمتغير هنا هو عدد النقط على وجه الزهرة العلوى . وهناك ست نتائج محتملة لعدد النقط هي 1,2,3,4,5,6 وهنا قد نتساءل : اذا القيت الزهرة عددا لانهايا من المرات ، فما هو متوسط عدد النقط التي ستحصل عليها لكل رمية ؟ وهذا هو ما نعتيه بتبشير العدد « المتوقع » للنقط التي سنحصل عليها عند اللقاء الزهرة .

فإذا القيت الزهرة عددا لانهايا من المرات فإن نسبة الرميات التي ستعطى الأرقام 1,2,3,4,5,6 هي جميعا $\frac{1}{6}$. وطبقا للنظرية الكلاسيكية لاحتمالات فإن هذه النسب هي احتمالات تلك القيم . وهكذا فإن العدد المتوسط لرميات لانهاية

$$\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3.5$$

أى أن العدد المتوقع للنقط التى نحصل عليها عند رمى الزهرة هو 3.5 . ولايهم أن هذا العدد لايمكن أن يظهر عند أية رمية . فهذا الرقم هو الوسط الذى نحصل عليه لعدد كبير من الرميات .
وتعرف القيمة المتوقعة لمتغير بصفة عامة كما يلي :

$$\text{القيمة المتوقعة} = \sum_{\text{كل نتائج التجربة}} (\text{القيمة المرتبطة}) \times (\text{احتمال النتيجة})$$

وهى القيمة المتوسطة التى سيأخذها المتغير المعنى بعد تكرار التجربة عددا كبيرا من المرات .

مثال ١٣ - ٢ - ١ : صممت ماكينة بسيطة من نوع «ماكينات الفاكهة» لتوضيح أفكار نظرية الاحتمالات للطلبة . ولهذه الماكينة ثلاثة شبابيك 1,2,3 وتظهر بكل شبك صورة نوع من الفاكهة : موزة أو تفاحة . ويتم ذلك بدوران عجلات داخل الماكينة بطريقة عشوائية ، ويكل عجلة خمس صور منها واحدة تمثل موزة ، والأربعة الباقية تمثل تفاحا . وتلعب هذه اللعبة بوضع ماركة فى الماكينة ، وبعد ادارة العجلات تعيد الماكينة الماركات حسب القواعد التالية :

الشبك	نوع المكسب	عدد الماركات المعادة
1 2 3		
موزة موزة موزة	A	50
تفاحة تفاحة تفاحة	B	3
موزتان فى أى وضع الأرضاع الأخرى	C	5
	عسكرة	لاشيء

(أ) احسب ما إذا كنت تتوقع أن تكسب على المدى البعيد .

(ب) احسب العدد الذى يجب أن تضبط عليه الماركات المعادة فى حالة المكسب A إذا كان المطلوب ألا يكون هناك مكسب ، أو عسكرة على المدى البعيد .

(جـ م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٨)

الاجابة

$$(أ) \text{ احتمال المكسب من النوع } A \text{ هو } \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$$

$$\text{وا احتمال المكسب من النوع } B \text{ هو } \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$$

$$\text{وا احتمال المكسب من النوع } C \text{ هو } \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{12}{125}$$

وهكذا ، فإن العائد المتوقع لكل لعبة باستخدام صيغة القيمة المتوقعة المعطاة أعلاه هو

$$50 \times \frac{1}{125} + 3 \times \frac{16}{125} + 5 \times \frac{12}{125} = \frac{158}{125}$$

وهذه القيمة أكبر من المدفوع ، وهو ماركة واحدة ، ولذلك فانا نتوقع أن نكسب على المدى البعيد .

(ب) لنفترض أننا ضبطنا المكسب للنوع A ليكون a ولكي لا يكون لدينا مكسب أو خسارة على المدى البعيد ، فإن

$$a \times \frac{1}{125} + 3 \times \frac{16}{125} + 5 \times \frac{12}{125} = 1$$

افضل $125 = 108 + a$ ومنها نوجد $a = 17$ أى أن ما نعهده الماكينة للمكسب من النوع A يجب أن يكون 17 مائة .

تعريف ١٣ - ٢ - ١ : هناك عمليتان مستقلتان A و B تبدآن فى وقت واحد . وزمن العمليتين غير مؤكد حيث أن احتمالات هذا الزمن كما يلي :

العملية A		العملية B	
الاحتمال	القيمة (بالأيام)	الاحتمال	القيمة (بالأيام)
0.5	2	0.1	1
0.3	3	0.2	2
0.2	4	0.5	3
		0.2	4

أوجد أى العمليتين A أو B لها زمن متوقع للانتهاء أقصر من الأخرى .

(جـ م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٨)

ويمكن لمسائل اتخاذ القرارات التى تتضمن قرارا واحدا ، ويتم فيها اختيار أفضل استراتيجية على أساس أعلى قيمة مالية متوقعة (وتسمى أحيانا بقاعدة بايز لاتخاذ القرارات) يمكن لها أن تحل بسهولة إذا وضعت فى شكل جدول . ونعتبر المثال التالى :

على مدير التسويق بأحدى الشركات أن يقرر ما إذا كان توزيع منتجات الشركة على نطاق البلاد أكثر ربحا من توزيعها على نطاق اقليمى . وفيما يلي البيانات التى سيبنى عليها القرار :

التوزيع الوطنى			التوزيع الأقليمى	
الربح الصالى (مليون £)	مستوى الطلب	احتمال تحقق مستوى الطلب	الربح الصالى (مليون £)	احتمال تحقق مستوى الطلب
4.0	عالى	0.50	2.5	0.50
2.0	متوسط	0.25	2.0	0.25
0.5	منخفض	0.25	1.2	0.25

(البيانات مأخوذة من م م أ - الجزء الرابع - ١٩٧٤)

ويسمى الجدول الوارد فى هذا السؤال ، والذي يوضح العائد المحتمل نتيجة لتنفيذ الاستراتيجيات فى ظل حالات الطبيعة المختلفة باسم « جدول العائد » . ويمكن توضيح الحل بالجدول التالى :

التوزيع PV	الربح الأقليمى V	التوزيع PV	الربح الوطنى V	الاحتمال P	مستوى الطلب
1.25	2.5	2.0	4.0	0.50	عالى
0.5	2.0	0.5	2.0	0.25	متوسط
0.3	1.2	0.125	0.5	0.25	منخفض
2.05		2.625			

ويتضح من الجدول أن الربح المتوقع في حالة التوزيع الوطني أكبر لذا فإن القرار طبقا لقاعدة بايز هو الاتجاه إلى التوزيع الوطني .

وبالنسبة لمثال صغير كهذا لم يكن هناك داع لإنشاء جدول لأن القيم المتوقعة لكل من السياستين كان يمكن حسابها في سطر واحد . ولكن بالنسبة لمسائل أكبر تكون هناك عادة عدة سياسات ممكنة ، وعندئذ يصبح الجدول مفيدا لاقتصاد الجهد ولتعتبر المثال التالي .

مثال ١٣ - ٢ - ٢ : يشتري مطعم كبير نوعا من الكعك من مخبز قريب كل يوم . وثمان كل كعكة 10 بنسات ، وتباع في المطعم بمبلغ 15 بنسا . ولكن ما لا يباع من الكعك حتى نهاية اليوم يرسل إلى متفد آخر للتوزيع يباع فيه بسعر 8 بنسات للواحدة . وفيما يلي التوزيع التكراري النسبي لمبيعات المطعم (مأخوذا من تحليل بيانات المبيعات السابقة) .

التكرار النسبي	المبيعات اليومية للكعك بالمطعم بالنسبة (النسبة = 12 نقطة)
0.01	30
0.09	31
0.16	32
0.25	33
0.30	34
0.11	35
0.08	36

والمطلوب :

تحديد أفضل كمية من الكعك يجب أن يشتريها المطعم يوميا لكي تصل أرباحه إلى أقصى حد .
(م م أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٦)

الاجابة : يمكن حل هذا المثال باستخدام الجدول الموضح في ص ٢٢٩

وهناك ربح قدره 60 بنسا على كل دسنة تباع في المطعم ، وخسارة قدرها 24 بنسا على كل دسنة لا تباع . وطبقا للجدول ، فإن أفضل كمية يجب شرائها لتحقيق أقصى ربح متوقع هي 34 دسنة . وهذا يعطى ربحا قدره £19.66 يوميا في المتوسط .

وطريقة الجدول مفيدة جدا لمسألة بهذه الدرجة من التعقيد . استعمل طريقة الجدول لحل التمرين التالي :

تمرين ١٣ - ٢ - ٢ : سمحت لصاحب محل لملابس الرجال فرصة شراء بدل رجالي خفيفة بسعر خاص هو £12 للبدلة إذا اشترى من الآن لوطات الواحدة بها 20 بدلة . والسعر العادي لشراء البدلة هو £16 وسعر بيعها بالتجزئة هو £24 . ولكنه إذا اشترى أكثر من اللازم ، فسيضطر إلى بيع الزيادة في آخر الموسم الصيفي بسعر £10 للبدلة وهو سعر تصفية كل البضائع الباقية . أما إذا اشترى أقل من اللازم ، فانه يستطيع الاستمرار في شراء احتياجاته الاضافية بالسعر المعتاد وهو £16 .

القيمة	شراء 30		شراء 31		شراء 32	
	الاحتمال	القيمة	الاحتمال	القيمة	الاحتمال	القيمة
30	0.01	1800	1776	17.76	1752	17.52
31	0.09	1800	1860	1836	1836	165.24
32	0.16	1800	1860	1920	1920	
33	0.25	1800	1860	1841.40	1920	
34	0.30	1800	1860	1920	1920	1728.00
35	0.11	1800	1860	1920	1920	
36	0.08	1800	1860	1920	1920	
مجموع		1800	1859.16	1910.76		
<hr/>						
القيمة	شراء 33		شراء 34		شراء 35	
	الاحتمال	القيمة	الاحتمال	القيمة	الاحتمال	القيمة
1728	17.28	1704	17.04	1680	16.80	1656
1812	163.08	1788	160.92	1764	138.76	1740
1844	303.36	1872	299.52	1840	295.68	1824
1900		1956	489.66	1932	483.60	1908
1980	1465.20	2040		2016	604.80	477.60
1980		2040	999.60	2100	399.00	597.60
1800		2040	1966.08	2100	1958.64	288.36
مجموع	1948.92					172.86
						1946.76

وكان تقديره للطلب على البديل اذا بيعت بسعر £24 كما يلي :

الاحتمال	الطلب (بذلة)
0.2	20
0.4	40
0.3	60
0.1	80

والمطلوب :

حساب عدد البديل التي يجب أن يطلبها هذا التاجر

(م م ت أ - الجزء الرابع - نوفمبر ١٩٧٣)

١٣ - ٣ تحليل شجرة القرارات

هذه الطريقة تستخدم لاتخاذ القرارات على أساس نظرية بايز عندما يكون مطلوبوا اتخاذ مجموعة من القرارات المتتابعة ، وليس مجرد قرار واحد ، كما في الأمثلة الواردة بالبند ١٣ - ٢ ومع ذلك فسنبدأ بحل المثال الوارد بالبند ٢٣ - ٢ . بشأن المفاضلة بين التوزيع الوطني والإقليمي لمنتجات الشركة لنوضح الرموز ، والنظام الأساسي للرسم البياني الشجري .

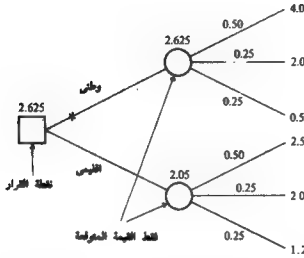
على مدير التسويق باحدى الشركات أن يفرض ما إذا كان توزيع منتجات الشركة على نطاق البلاد أكثر ربحا من توزيعها على نطاق إقليمي أضيق . وفيما يلي البيانات التي سيبنى عليها القرار

التوزيع الوطني		التوزيع الإقليمي	
احتمال تحقق مستوى الطلب	الربح الصافي (£ مليون)	احتمال تحقق مستوى الطلب	الربح الصافي (£ مليون)
0.50	2.5	0.50	4.0
0.25	2.0	0.25	2.0
0.25	1.2	0.25	0.5

(البيانات مأخوذة من م م ت أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٤)

وبين شكل (١٣ - ١) الرسم البياني الشجري لهذه المسألة . وفي هذا الرسم البياني يمثل كل قرار يجب اتخاذه بمربع . وفي هذا المثال البسيط لا يوجد الا قرار واحد وهو التوزيع على نطاق وطني أو إقليمي . ويمثل هذا القرار بالمربع المعلنون « نقطة القرار » بشكل ١٣ - ١ ويخرج من تلك النقطة خط يمثل كل استراتيجية يمكن اتباعها .

ويمثل الشكل في القرار بدوائر على شجرة القرار . وقد وضع على تلك الدوائر في شكل ١٣ - ١ عنوان هو « نقط القيمة المتوقعة » ويخرج من كل نقطة قيمة متوقعة خط واحد لكل حالة من حالات الطبيعة التي يمكن أن تسود ، وقد كتب على كل خط احتمال حالة الطبيعة التي يمثلها .



شكل ١٣ - ١

وفي الرسوميات الشجرية الأكثر تعقيدا تتصل المربعات ، والدوائر بخطوط بمختلف الأشكال كما سنرى في المثال ١٣ - ٣ - ١ . وفي النهاية يجب أن تؤخذ في الاعتبار كل القرارات والشكوك ، وأن تكون لدينا على الجانب الأيسر من الرسم خطوط ليس على أطرافها شيء . ويكتب على أطراف تلك الخطوط قيمة النتيجة المقابلة للقرارات المتتابة المختلفة ولحالات الطبيعة المؤدية للنقطة المعنية . وفي شكل ١٣ - ١ فإن هذه النتائج هي الأرباح المقابلة للقرارين (التوزيع الوطنى ، والأقليمي) في ظل ثلاث حالات للطبيعة (الطلب العالى ، والمتوسط ، والمنخفض) . ويتطلب حل المسائل تناول الرسم البياني من اليمين الى اليسار . ونكتب أمام كل « نقطة قيمة متوقعة » القيمة التي حصلنا عليها باستخدام الاحتمالات المكتوبة على الخطوط الخارجة من تلك النقطة ، والقيم المكتوبة على أطراف الخطوط . ونكتب أمام كل « نقطة قرار » أفضل قيمة مالية متوقعة EMV يمكن الحصول عليها بالسير على أحد الخطوط الخارجة من نقطة القرار ، ونضع علامة نجمة * على الخط المعنى .

وبالنسبة لمثالنا في شكل ١٣ - ١ فإن القيم المتوقعة هي 2.05 و 2.625 وأكبر هاتين القيمتين هي 2.625 ولذلك فإن القرار يكون التوزيع على نطاق وطنى مما يعطى EMV مقدارها £2.625 .

وستناول الآن مثالا به عدة قرارات مرتبطة فيما بينها بطرق مختلفة .

مثال ١٣ - ٣ - ١ : تفكر شركة في طرق تطوير العملية الانتاجية لزيادة طاقتها لمواجهة زيادة متوقعة في الطلب على انتاجها من مادة صناعية أساسية . وبعد دفع التكاليف الجارية للتشغيل لتتوقع الشركة تحقيق ربح صاف مقداره £20 000 في الفترة من العملية الانتاجية القائمة عند عملها بكامل طاقتها .

وكل البيانات المعطاه منسوبة لنفس الفترة

وقد أهد مدير البحوث والتطوير قائمة بالاجراءات التي يمكن اتخاذها كمايلي :

(أ) استخدام عملية انتاجية طورتها شركة أخرى تنتج منتجات مشابهة : وسيكلف هذه £7000 مقابل حق استخدام العملية ويعطى ربحا صافيا قدره £30 000 (قبل دفع حقوق الاستخدام) .

(ب) اجراء برنامج لوبرنامجين للبيعت :

(١) البرنامج الأول أكثر تكلفة إذ يكلف £15 000 لاجرائه ، ولكن ينتظر أن تكون فرصة نجاحه 0.8 وفي تلك الحالة

ستكون الأرباح الصافية £40 000 (قبل دفع تكاليف البحث) كما ينتظر الحصول على دخل إضافي قدره £8000 مقابل بيع حق الاستخدام للأخرين .

(ii) برنامج آخر للبحث أقل تكلفة إذ يكلف 12 000 لاجرائه ، ولا ينتظر أن تكون فرصة نجاحه أكثر من 0.5 والربح الصافي الناتج عنه نفس المذكور للبرنامج (i)

(يلاحظ أن فشل أحد برنامجي الأبحاث لا يقلل الطريق أمام الإجراءات الأخرى بما فيها البحث الثاني) .

(ج) الاستمرار في تشغيل المصنع الحالي دون توسع لمواجهة الزيادة في الطلب .

والمطلوب تمميم المقترحات المذكورة لتحديد أكثر الإجراءات ربحية .

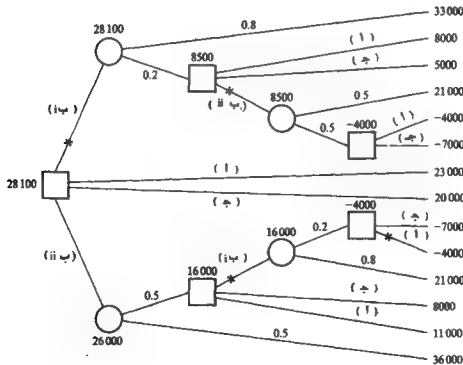
(م م أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٥)

الاجابة : يبين شكل ١٣ - ٢ شجرة القرار لهذا المثال .

وتبين الشجرة كل القرارات المتتابعة التي يمكن أن تتخذ ، وفي نهاية كل تتابع بينا الربح النهائي الذي نحصل عليه في حالة اتخاذ القرار ، وحدوث حالة الطبيعة المينة وتبين المخطوط الخارجة من نقط القرار القرارات التي يمكن أن تتخذ ، وتبين المخطوط الخارجة من نقط القيمة المتوقعة احتمالات حالات الطبيعة أي نجاح ، أو فشل مشاريع البحث المعنية .

وقد تمت معالجة الشجرة من اليمين الى اليسار ، كما بيننا فيما سبق وعرجنا بنتيجة هي أنه يمكن الحصول على ربح متوقع أقصى هو £28 100 . ونصل لهذه النتيجة بتتابع الاجراءات التالية :

حاول أولا برنامج البحث رقم (ب i)



شكل ١٣ - ٢

فإذا فشل هذا البرنامج حاول برنامج البحث (ب ii)

فإذا فشل البرنامج الثاني استخدم عملية الشركة الأخرى (أ)

وفي نهاية هذا الجزء ستناول مثالا بسيطا نسبيا بشأن استثمارين متباينين .

مثال ١٣ - ٣ - ٢ : المطلوب استخدام البيانات المذكورة أعلاه لما يلي :

(أ) رسم شجرة القرار لتوضيح العلاقات بين مجموعتي النتائج .

(ب) حساب القيمة المالية الصافية المتوقعة نتيجة للاستثمارين .

وبالجدول التالي الاحتمالات المرتبطة بثلاث نتائج ممكنة للاستثمارين . وتتمثل النتائج بمجموعة من الأحداث المستقلة المتنافية :

النتائج المالية للصافي للاستثمار Y (د)	النتائج المالية للصافي للاستثمار X (د)			
	0	2000	4000	
0	0.04	0.12	0.04	0.20
2000	0.12	0.36	0.12	0.60
4000	0.04	0.12	0.04	0.20
	0.20	0.60	0.20	

(م م ت أ - الجزء الرابع - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة : يبين شكل ١٣ - ٣ شجرة القرار لهذا المثال . ويوضح هذا المثال أنه قد لا يكون هناك استراتيجية واحدة مفضلة . ولا يؤثر ترتيب القيام بالاستثمارات على القيمة المالية المتوقعة EMV والقيمة المالية الصافية المتوقعة هي £4000 .

تمرين ١٣ - ٣ - ١ : شركة لديها £50 000 متاحة للاستثمار . وتفكر الشركة في مشروعين للاستثمار المشروع X وله احتمالات متساوية في أن يدر ربحا قدره £6000 أو خسارة قدرها £2500 والمشروع Y وله احتمالات متساوية في أن يدر ربحا قدره £9000 ، أو خسارة £6000 ويتطلب كل من المشروعين استثمارات أولية قدرها £25 000 .

(١) احسب الربح المتوقع في حالة القيام بالمشروعين معا .

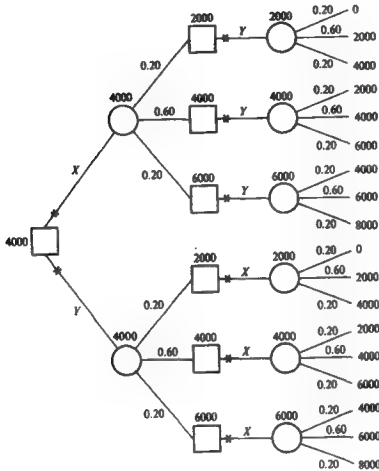
(٢) لو كان المتاح للاستثمار فورا مبلغ £25 000 فقط ولكن الأصل مضافا إليه الربح أو مروحيا منه الخسارة سيكون جاهزا بعد شهر من البدء في أحد المشروعين . ويمكن عندئذ استثمار هذا المبلغ في المشروع الثاني ، مع إهمال الفوائد على المبالغ غير المستقلة الباقية . ماهو أفضل إجراء تتخذه الشركة ، وماهى النتيجة المالية ؟

(م م ت أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٥)

١٣ - ٤ ضياع الفرصة

يمكن بدلا من اعتبار المائد الناتج عن إختيار استراتيجية معينة عندما تسود حالة طيحية معينة أن نعتبر الفرصة الضائعة الناتجة من هذا الاختيار . وهذه الفرصة هى الفرق بين المائد المحقق ، وذلك الذى كان يمكن تحقيقه لو استخدمنا الاستراتيجية التى تغطى أفضل عائد لحالة الطيحية تلك .

اعتبر البيانات بعائد التوزيع الوطنى ، والاقليمى فى حالة الطلب العالى ، والمتوسط والمنخفض .



شكل ١٣ - ٣

الطلب	العائد من التوزيع الإقليمي (مليون £)	العائد من التوزيع الوطني (مليون £)
عالي	4.0	2.5
متوسط	2.0	2.0
منخفض	0.5	1.2

(البيانات مأخوذة من م م ت أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٤)

فإذا تقرر التوزيع على النطاق الوطني ، وكان الطلب عاليا ، فإن أفضل نتيجة ممكنة في ظل حالة الطلب المالي ستتحقق ، وهذا يعني أن الفرصة الضائعة صفر . وكذلك إذا كان الطلب متوسطا ، فإن التوزيع على النطاق الوطني يعطي فرصة ضائعة تساوى صفرا . ولكن إذا كان الطلب منخفضا ، فإن التوزيع على النطاق الوطني يعطي عائدا قدره £0.5m فقط في حين أن التوزيع على النطاق الإقليمي كان سيحظى £1.2m . وهكذا فإن التوزيع على النطاق الوطني يؤدي إلى فرصة ضائعة قدرها £0.7m . وفي حالة الطلب المتوسط أو المنخفض فإن استراتيجية التوزيع الإقليمي تعطي فرصة ضائعة تساوى صفرا . في حين أنه في حالة الطلب العالي تكون هناك فرصة ضائعة مقدارها : £4.0m — £2.5m = £1.5m .

وهكذا يكون جدول الفرصة الضائعة لهذا المثال كما هو مبين فيما يلي :

الفرصة الضائعة في التوزيع الوطني المطلوب (مليون £)	الفرصة الضائعة في التوزيع الاقليمي. (مليون £)
عالي	1.5
متوسط	0
منخفض	0

وبصفة عامة نرى أن الفرصة الضائعة يمكن إيجادها من جدول العائد بطرح كل الأرقام الواردة في أحد الصفوف من أكبر الأرقام في الصف .

وبعد إيجاد الفرص الضائعة يمكن استخدامها بنفس الطريقة التي تستخدم بها العوائد نفسها . وبصفة خاصة يمكن استخدام قاعدة بايز مع الفرصة الضائعة بحساب الفرصة الضائعة المتوقعة المرتبطة بكل استراتيجية ، وبالتالي اختيار الاستراتيجية التي تعطي أقل فرصة ضائعة متوقعة . ويمكن بسهولة إثبات أن الاستراتيجية التي تعطي أقل فرصة ضائعة متوقعة هي نفسها الاستراتيجية التي تعطي أقصى عوائد متوقعة . وهكذا فإن قاعدة بايز للقرارات تنطبق على العوائد أو الفرصة الضائعة معطية نفس النتيجة . أما بالنسبة للمقاييس الأخرى للقرارات التي ستتناولها في البند ١٣ - ٦ فإن استخدام الفوائد ، أو الفرصة الضائعة يؤدي عامة الى تبني استراتيجيات مختلفة .

وكمثال لحساب الفرصة الضائعة نأخذ حل المسألة السابقة على شكل جدول بعد ادخال احتمالات الحالات الطبيعية المختلفة

الطلب	الاحتمال P	الفرصة الضائعة في التوزيع الوطني V_1 (مليون £)	الفرصة الضائعة في التوزيع الاقليمي V_2 (مليون £)	PV
عالي	0.50	0	1.5	0.75
متوسط	0.25	0	0	0
منخفض	0.25	0.7	0	0
			0.175	0.75

والفرصة الضائعة الأقل هي تلك المرتبطة بالتوزيع الوطني ، وبذلك فإن قاعدة بايز للقرارات تقول باتباع هذه الاستراتيجية .

وفي نهاية هذا الجزء ستتناول مثالا آخر لحساب الفرصة الضائعة المتوقعة .

مثال ١٣ - ٤ : تفكر شركة في شراء معدات لانتاج اجزاء لازمة لبرنامج تنمية البترول في بحر الشمال . وهناك ثلاثة أنواع من المعدات التي يمكن شراءها .

(١) معدات تقليدية - تشغيل يدوي .

(٢) معدات ذات تحكم رقمي .

(٣) معدات ذات تحكم رقمي بواسطة الكمبيوتر .

وتزداد التكاليف الاستثمارية اذا انتقلنا من النوع (١) الى (٢) ثم (٣) ويتوقف العائد من أي سيارة تتبع على حجم السوق الذي ستورد اليه الاجزاء ، وهو أمر غير مؤكد حاليا . وقد تم تقسيم السوق الى ثلاثة مستويات عامة : ضعيف ، متوسط ، وجيد . وبين الجدول التالي الأرباح (أو الخسائر وهي موضحة بعلامة ناقص) حسب حالة السوق ونوع الماكينات :

الأرباح (مليون £)

تقليدى	رقمى	رقمى بالكمبيوتر	السوق
-1.5	0	0.5	ضعيف
0.5	1.5	1.0	متوسط
3.5	2.5	1.5	جيد

وقد قدرت احتمالات أن تكون السوق ضعيفة ، أو متوسطة ، أو جيدة بالقيم 30% أو 50% أو 20% على الترتيب وفقا لتقديرات ادارة الشركة .

احسب الفرصة الضائعة المتوقعة لكل نوع من المعدات ، ثم استخدم قاعدة بايز للقرار لتحديد النوع الذى يجب شراؤه .

(م م ت أ - المهنى - نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة : يمكن ترتيب خطوات الحل فى الجدول التالى الذى يبين الفرصة الضائعة ، واحتمالات الحالات الثلاث للظيعة ، وحساب القيم المتوقعة .

الفرصة الضائعة V (مليون £)	pV	الفرصة الضائعة V (مليون £)	pV	الفرصة الضائعة V (مليون £)	pV	الاحتمال ، P	السوق
2	0.15	0.5	0	0	0.3	0.3	ضعيف
1	0	0	0.25	0.5	0.5	0.5	متوسط
0	0.20	1	0.40	2	0.2	0.2	جيد
	0.35	0.65					
	1.10						

وأصغر فرصة ضائعة متوقعة هي تلك المرتبطة بالمعدات ذات التحكم الرقمى ، ولذلك يلزم شراء هذا النوع .

وسنعود مرة أخرى الى الفرصة الضائعة فى البند ١٣ - ٦ عندما نناقش المقاييس الأخرى للاختيار بين الاستراتيجيات المختلفة .

تمرين ١٣ - ٤ - ١ : يقوم تاجر تجزئة بشراء باقات من الزهور فى الصباح الباكر من السوق بسعر 10 بنسات للواحدة . ويتوزع بيعها بسعر 25 بنسا للواحدة . ولا يخفض التاجر اسعاره طوال النهار ، ولكنه يعطى ما يتبقى من الزهور دون بيع فى المساء للمستشفى المحلى . ويمكن للتاجر أن يشتري كل صباح الأعداد التالية من الباقات 100 ، 200 ، 300 و 400 . ويقدر التاجر الطلب على الباقات يوميا كما يلى :

عدد الباقات	الاحتمال
0	0.05
100	0.20
200	0.40
300	0.25
400	0.10

احسب الفرصة الضائعة المتوقعة حسب السياسات الممكنة للشراء ، ثم حدد عدد الباقات التى يجب أن يشتريها التاجر يوميا حتى يحصل على أقصى ربح فى المدى الطويل .

(م م ت أ - الجزء الرابع - يونيو ١٩٧٧)

١٣ - ٥ المعلومات الكاملة

لو كان متخذ القرار يعلم بالضبط أى حالات الطبيعة مستود لاستطاع أن يتجنب الفرصة الضائعة تماما . وفى تلك الحالة سيختار الاستراتيجية التى تعطى أفضل عائد فى ظل تلك الحالة من حالات الطبيعة . ولو كان ممكنا الحصول على معلومات كاملة عن حالة الطبيعة لزال الشك تماما ، وانتهت مشاكل متخذ القرارات . ولكن هذا غير ممكن مع الأسف ، ومع ذلك ، فمن المفيد أن نفكر بعض الشيء فى مسألة المعلومات الكاملة . ومن الممكن تقليل الشك المتعلق بحالات الطبيعة بإجراء أبحاث السوق أو غيرها من طرق البحث حتى لو تكلفت بعض المال . ولو عرفنا مدى تحسن موقف متخذ القرار إذا حصل على المعلومات الكاملة لأمكن أن نضع حدا أعلى لما يمكن صرفه للحصول على المعلومات . وهكذا ، فمن المفيد أن نحسب قيمة المعلومات الكاملة . وهذا المبلغ هو أقصى ما يمكن أن يستحق أن يدفع لتحسين معلوماتنا (دون أن تصبح كاملة) عن حالات الطبيعة .

وتحسب قيمة المعلومات الكاملة بإيجاد العائد المتوقع الحصول عليه لو كانت لدينا معلومات كاملة ، ويطرح منه العائد المتوقع عند استعمال الاستراتيجية الأفضل فى ظل غياب المعلومات الكاملة .

سنناول مرة أخرى نتائج من التوزيع الوطنى والأقليمى لمنتجات إحدى الشركات

التوزيع الوطنى		التوزيع الأقليمى	
الربح الصالى (مليون £)	احتمال تحقق مستوى الطلب	الربح الصالى (مليون £)	احتمال تحقق مستوى الطلب
عالي	4.0	2.5	0.50
متوسط	2.0	2.0	0.25
منخفض	0.5	1.2	0.25

(البيانات مأخوذة من م م ت أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٤)

وقد رأينا فى البند ١٣ - ٢ أن السياسة التى تعطى أعلى قيمة مالية متوقعة هى التوزيع الوطنى ، وأن الربح المتوقع فى هذه الحالة هو £2.625m .

ولو كانت لدينا معلومات كاملة تدل على أن مستوى الطلب سيكون عاليا لقررنا اتباع سياسة التوزيع الوطنى ، وحصلنا على ربح قدره £4.0m واحتمال حدوث ذلك هو 0.5 .

ولو كانت لدينا معلومات كاملة تدل على أن مستوى الطلب سيكون متوسطا لقررنا اختيار أى من طريقتى التوزيع ، وحصلنا على ربح قدره £2.0m واحتمال حدوث ذلك هو 0.25 .

ولو كانت لدينا معلومات كاملة تدل على أن مستوى الطلب سيكون منخفضا لاتبعنا التوزيع الاقليمى ، وحصلنا على ربح قدره £1.2m . واحتمال حدوث ذلك هو 0.25 .

وهكذا ، فإن الربح المتوقع لو كانت لدينا معلومات كاملة هو

$$£(4.0 \times 0.5 + 2.0 \times 0.25 + 1.2 \times 0.25)m = £(2 + 0.5 + 0.3)m = £2.8m$$

وهكذا فإن التحسن الناتج عن حصولنا على المعلومات الكاملة هو $£0.175m = £2.625m - £2.8m$ وهذه هي قيمة المعلومات الكاملة . وتساوى كذلك الفرصة الضائعة المتوقعة عند استخدام أفضل استراتيجية في غياب المعلومات الكاملة . وكنا قد أوجدنا الفرصة الضائعة المتوقعة عند التوزيع الوطنى في البند ١٣ - ٤ وكانت تساوى $£0.175m$.

وباستعمال هذه الحقيقة نجد أن قيمة المعلومات الكاملة عن السوق في مثال معدات تنمية بترول بحر الشمال بالبند ١٣ - ٤ هي $£0.35m$ وتمكننا المعلومات الكاملة من إلغاء الفرصة الضائعة المتوقعة مع أفضل استراتيجية .

وفى نهاية هذا الجزء سنتناول مثالا يستخدم نفس البيانات الخاصة بمبيعات الكعك فى أحد المطاعم الذى درسنه قبلًا فى البند ١٣ - ٢ .

مثال ١٣ - ٥ : ١ يشتري مطعم كبير نوعا من الكعك من مخبز قريب كل يوم وثمن كل كعكة 10 بنسات وتباع فى المطعم بمبلغ 15 بنسا . ولكن مالا يباع من الكعك حتى نهاية اليوم يرسل الى منفذ آخر للتوزيع يباع فيه بسعر 8 بنسات للواحدة . وفيما يلى التوزيع التكرارى النسبي لمبيعات المطعم (مأخوذا من تحليل بيانات المبيعات السابقة)

المبيعات اليومية للكعك بالمطعم (بالعملة) (العملة = 12 كعكة)	التكرار النسبي
30	0.01
31	0.09
32	0.16
33	0.25
34	0.30
35	0.11
36	0.08

والمطلوب :

ايجاد ما يمكن للمطعم أن ينفقه للحصول على معلومات صحيحة تماما عن المبيعات اليومية .

(ممت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٦)

الاجابة : أوجدنا فى الجزء ١٣ - ٢ أن أفضل سياسة فى غياب المعلومات الكاملة هى شراء 34 دسنة يوميا مما يعطى ربحا يوميا متوقعا قدره £19.66. ولو كان لدى المطعم معلومات كاملة لاشترى كل يوم عدد الكعك بالضبط الذى يعلم أنه سيباع فى ذلك اليوم ، وبالتالي فإنه لن يضطر لبيع أى من الكعك بخسارة 2 بنس .

وربح المطعم فى كل دسنة تباع به هو $p = £0.6 = 60p = (10 - 15) \times 12$ ، وهكذا فإن الربح اليومي المتوقع مع توفر المعلومات الكاملة هو

$$\begin{aligned} & £0.6 \times (30 \times 0.01 + 31 \times 0.09 + 32 \times 0.16 + 33 \times 0.25 + 34 \times 0.30 + 35 \times 0.11 \\ & + 36 \times 0.08) = £0.6 \times (0.30 + 2.79 + 5.12 + 8.25 + 10.20 + 3.85 + 2.88) \\ & = £0.6 \times 33.39 = £20.034 \end{aligned}$$

ومنها نوجد التحسن فى الربح اليومي المتوقع بفضل توفر المعلومات الكاملة ، ويساوى $37p = £19.66 - £20.03$. وبالتالي فإن أقصى ما يمكن للمطعم انتفاعه للحصول على المعلومات الكاملة عن المبيعات اليومية هو 37 بنسا .

تصريف ١٣ - ١ : طلب أحد النوادي المحلية مشورتك بشأن عدد البرامج التي تطيع لكل مباراة كرة قدم . وكانت تكاليف طبع وإنتاج البرنامج لكل مباراة حسب العرض الذي تقدمت به مطبعة محلية هي £1000 زائد 4 بنسات لكل نسخة . ويمثل دخل الاعلانات الذي تم الاتفاق عليه عن الموسم £800 لكل مباراة .

وتابع البرنامج بمبلغ 15 بنسا لكل برنامج . وقد أظهرت دراسة المبيعات في المواسم السابقة أنه يتنظر أن تتكرر العلاقة التالية بين عدد البرامج المبيعة ، وعدد المباريات خلال الموسم القادم الذي سيضمن 50 مباراة .

عدد البرامج المباعة	عدد المباريات
10 000	5
20 000	20
30 000	15
40 000	10

وتابع البرامج التي لا تباع في المباراة كنفاية ورقية لمصنع اللورق بسعر بنس واحد للنسخة .

ويغرض أن الكميات الأربع المذكورة أعلاه هي الامكانات الوحيدة المطلوب :

(أ) أعداد جداول العائد .

(ب) تحديد عدد البرامج التي تحقق أعلى ربح إذا كان نفس العدد من البرامج سيطبع لكل مباراة .

(ج) حساب الربح الذي ينتج من تبني صحيح بعدد البرامج التي ستباع في كل مباراة ، وبالتالي تحديد قيمة مثل هذا التنبؤ الصحيح .

(م م ت أ - ١ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٩)

١٣ - ٦ معايير أخرى للاختيار

تتعلق قاعدة بايز للقرارات التي تستخدم القيمة المالية المتوقعة ، أو الفرصة الضائعة المتوقعة بالمحدد المتوسط الذي تعطيه استراتيجية ما لو طبقت بفرض تكرار الموقف المبحوث عددا كبيرا من المرات . وهذا المدخل منطقي ، ولذلك فإن نظرية بايز هي أكثر المقاييس المستعملة شيوعا لاختيار الاستراتيجيات . ولكن عيب هذه النظرية هي أنها في موقف معين قد تؤدي إلى قرار مدعمر . وبالنسبة لمؤسسة كبيرة فإن كارثة كهذه لن تسبب ضررا كبيرا كما أن التطبيق المستمر لقاعدة بايز يمكن أن يؤدي إلى نتائج أفضل من المتوقع عددا كبيرا من المرات بحيث تعرض أثر النتائج الأسوأ من المتوقع . أما بالنسبة لشركة صغيرة ، فإن قرارا خاطئا واحدا يمكن أن يؤدي إلى كارثة ، ولذلك يفضل استخدام طريقة تضمن عدم حدوث الكوارث حتى ولو كان الربح المتوقع منها أقل مما تعطيه قاعدة بايز . وهذه هي الفكرة وراء معيار بسيط للقرار يسمى مبدأ الحد الأعلى - الأدنى .

ولتوضيح مبدأ الحد الأعلى - الأدنى سنتناول مرة أخرى جدول العائد من التوزيع الوطني والاقليمي لمنتجات إحدى الشركات .

الطلب	العائد من التوزيع الوطني (مليون £)	العائد من التوزيع الاقليمي (مليون £)
عالي	4.0	2.5
متوسط	2.0	2.0
منخفض	0.5	1.2

(البيانات مصنوعة من م م ت أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٤)

وقد أوجدنا عدة مرات أن التوزيع الوطني يعطى أكبر ربح متوقع . ومع ذلك فانا لوفرنا التوزيع الوطنى ، وجاء الطلب منخفضا ، فإن الربح سيكون £0.5m فقط . أما لوفرنا التوزيع الاقليمى ، فإن أسوأ ما يمكن أن يحدث هو مكسب قدره £1.2m (حتى عندما يكون الطلب منخفضا) . وهكذا فإن مبدأ الحد الأعلى - الأدنى يدعونا لتبنى سياسة التوزيع الاقليمى لأنها تجعل العائد يصل إلى حد أعلى إذا كانت حالة الطبيعة بحيث تجعل الربح يصل إلى حد أدنى عند تطبيق الاستراتيجية التى اخترناها . والواقع أن مبدأ الحد الأعلى - الأدنى مبدأ متشائم فى اتخاذ القرارات لأنه يهتم بالحالة التى تلحق بنا الطبيعة معها أكبر ضرر فى ظل الاستراتيجية المختارة . وبصفة عامة ، فإن قاعدة الحد الأعلى - الأدنى توجد الحد الأدنى فى كل عمود ، ثم تختار العمود الذى به أكبر حد أدنى . وقاعدة الحد الأعلى - الأدنى هى أكثر قواعد اتخاذ القرارات التى تستناولها فى هذا الجزء استخداما ، ولكنها أقل أهمية من قاعدة بايز للقرارات .

والمدخل المكسب للملك الموجود فى قاعدة الحد الأعلى - الأدنى هو فى قاعدة الحد الأعلى - الأعلى . وفى هذه الحالة ، فإن متخذ القرار يبدو كشخص مختال (أو مغامر) يهتم بأفضل نتيجة يمكن أن تحدث بفضل اختياره لاستراتيجية ما . وربما كان ذلك لأنه يعتقد أن الطبيعة ستكون رحيمة نحوه وربما لأن أفضل نتيجة فقط هى التى تهتم وهو على استعداد للمقامرة على أمل تحقيقها . وبالنسبة للمثال الذى نبحثه ، فإن أفضل نتيجة ممكنة للتوزيع الوطنى هى £4.0m عندما يكون الطلب عاليا . وأفضل نتيجة ممكنة للتوزيع الاقليمى هى £2.5m أيضا عندما يكون الطلب عاليا . ونقول قاعدة الحد الأعلى - الأعلى بالأخذ بالتوزيع الوطنى لأنه يجعل العائد يصل إلى حد أعلى إذا كانت الطبيعة بحالة تجعل الربح فى ظل الاستراتيجية المختارة يصل إلى حد الأعلى . والعمل بقاعدة الحد الأعلى - الأعلى يعنى إيجاد أكبر عائد فى الجدول واختيار الاستراتيجية المقابلة للعمود الذى توجد به أكبر قيمة .

وفى النهاية سنعود إلى فكرة الفرصة الضائعة ونبحث معيارا لاتخاذ القرارات لها نفس طابع المعيارين المبحثين أعلاه . ونعتبر مرة أخرى جدول الفرصة الضائعة المستنبط فى البند ١٣ - ٤ لمثالنا .

الفرصة الضائعة فى التوزيع الوطنى (مليون £)	الفرصة الضائعة فى التوزيع الاقليمى (مليون £)
متوسط 0	1.5
عالي 0	0
منخفض 0.7	0

وباستخدام هذا الجدول يمكن أن نقول أن التوزيع الوطنى أفضل لأن أكبر فرصة ضائعة فيه هى £0.7m فى حين أن التوزيع الاقليمى قد تكون به فرصة ضائعة مقدارها £1.5m وهذا مثال لتطبيق قاعدة الحد الأدنى - الأعلى على الفرصة الضائعة إذ توجد أقصى فرصة ضائعة يمكن أن تحدث فى ظل كل استراتيجية ، ثم تختار الاستراتيجية التى يكون فيها هذا الحد الأعلى أصغر ما يمكن . أى أننا نجعل الحد الأعلى للفرصة الضائعة يصل إلى حد أدنى . والفكرة العامة هى بهيجاد أقصى قيمة فى كل عمود من جدول الفرصة الضائعة ، ثم اختيار الاستراتيجية المقابلة للعمود المحتوى على أصغر أقصى قيمة .

ونلاحظ أن المفاهيم الثلاثة المبسطة فى هذا الجزء تستخدم احتمالات حدوث الحالات الثلاث للطبيعة . وللملك نفس مفاهيم يمكن استخدامها فى حالات الشك الحقيقية وليس المخاطرة التى لا تكون فيها الاحتمالات معلومة . ولكن فى العامة يكون لدينا بعض المعلومات بشأن احتمالات حدوث حالات الطبيعة المختلفة حتى ولو كانت تقريبية جدا . وهذه النقطة تؤخذ ضد هذه المفاهيم باختيار أنها تضع تلك المعلومات .

تعرين ١٣-٦-١ : تفكر شركة « زيتا للصناعات ليمتد » في ادخال لعبة على شكل سيارة يتم التحكم فيها لاسلكيا إلى السوق . ولدى الشركة ثلاثة طرازات مختلفة ممكنة هي الطرازات X و Y و Z وهي مختلفة في درجة تعقيدها . ولكن الشركة لديها طاقة انتاجية تكفي لانتاج طراز واحد فقط . وفيما يلي الربح المتوقع في ظل الحالات الثلاث الممكنة لتقبل الجمهور للطرازات الجديدة .

الربح بآلاف الجنيهات للطرازات			
الحال الطراز	X	Y	Z
ممتاز	120	100	60
متوسط	80	60	50
ضعيف	-30	-20	0

أوجد أفضل طراز يجب انتاجه بطريقة

- ١ - الحد الأعلى - الأدنى .
- ٢ - الحد الأعلى - الأعلى .
- ٣ - الحد الأدنى - الأعلى مطبقا على الفرصة الضائعة .

تعالين

١٣-١ : توجد ثلاثة خيارات أمام شركتك لتنفيذ الالتزام الذي تعهدت به عند بيع 2000 جهاز اتصال لمجموعة من الفنادق . وكان الالتزام بضمان عمل الاجهزة ستين مع صيانتها مجانا والخيارات الثلاثة هي :
(١) القيام بالصيانة بالقوى الذاتية . وطبقا للخبرة السابقة ستكون التكاليف كما يلي :

احتمال الحدوث	معدل الصيانة	التكاليف الكلية
0.3	اصطال قليلة جدا (900 طلب في العام)	7 000
0.5	اصطال متوسطة (1000 طلب في العام)	12 000
0.2	اصطال كثيرة (1500 طلب في العام)	25 000

(٢) التعاقد من الباطن مع شركة Z التي عرضت اجراء الصيانة مقابل مبلغ ثابت هو £14 000 مضافا إليه £2 لكل زيارة تزيد عن 750 زيارة خلال فترة التأمين .

(٣) التعاقد من الباطن مع شركة Y التي عرضت اجراء الصيانة مقابل مبلغ ثابت هو £15 000 . والمطلوب تقديم النصيح للشركة عن الاختيار الواجب اجراؤه . بين سبب الاقتراح .

(م م أ - الجزء الرابع - نوفمبر ١٩٧٤)

١٣-٢ : تقوم شركتك بانتاج سلع لسوق تتغير فيه التكنولوجيا بسرعة . وقد طورت إدارة البحوث والتطوير متجعا جديدا يدعى أن له امكانيات طيبة للاستغلال التجاري . ومطلوب مبلغ £60 000 أخرى لاختبار المنتج الجديد . ولدى الشركا 100 عميل ، ويمكن أن يشتري كل عميل وحدة واحدة من المنتج على الأكثر . وتقرّر إدارة بحوث السوق بيع المنتج بمبلغ £6000 للوحدة وتقدر التكاليف المتغيرة للانتاج والبيع بنحو £2000 للوحدة .

وقد أمكن استنباط توزيع احتمالي حسب عدد العملاء الذين سيشترون المنتج كما يلي وذلك كنتيجة للخبرة السابقة في هذا النوع من السوق .

نسبة العملاء	الاحتمال
0.04	0.1
0.08	0.1
0.12	0.2
0.16	0.4
0.20	0.2

والمطلوب :

تعدد الفرصة الضائعة المتوقعة دون معلومات أخرى غير تلك المعطاة ، وتحديد ما إذا كان على الشركة تطوير المنتج أولا .

(م م ت أ - المهني ١ - نوفمبر ١٩٧٨)

١٣- قامت شركة RM(Midland) مؤخرا بتركيب ماكينات جديدة ، ولكنها لم تقرر بعد العدد المناسب من قطعة غيار معينة لازمة للاصلاح . وتكلف كل قطعة غيار £2000 ولكنها متاحة فقط اذا طلبت الآن . واذا تعطل المصنع ، ولم تكن هناك قطع غيار ، فإن تكاليف اصلاح المصنع ستكلف الشركة £15 000 والعمر الافتراضي للمصنع هو 10 سنوات واحتمالات التعطل خلال هذه الفترة على أساس الخبرة السابقة مع مثل هذا المصنع كما يلي :

عدد مرات التعطل في فترة عشر سنوات	الاحتمال
0	0.1
1	0.4
2	0.3
3	0.1
4	0.1
5 أو أكثر	لا شيء

احمل أي خصم على قيمة التفوق مع الزمن .

والمطلوب حساب :

(أ) العدد المتوقع لحالات التعطل في فترة عشر سنوات.

(ب) أفضل عدد لقطع الغيار التي يجب شراؤها الآن .

(و يجب أن يتضمن الحل جدولاً لظهور الطرق المختلفة للطلب وللتعطل)

(ج) تكاليف خطة الشراء المختارة الآن .

(د) قيمة المعلومات الكاملة عن عدد الأعطال في فترة العمر الافتراضي وهي عشر سنوات .

(م م ت أ - المهني ١ - مايو ١٩٨٠)

١٣- ٤ تواجه منتج للمعدات الكهربائية للسيارات مشكلة إنشاء مصنع جديد لإنتاج المعدات الإلكترونية للسيارات . وقد أجريت عدة تقديرات لحجم المصنع الجديد . وتم اختيار حجمين على أساس التنبؤات عن مستقبل الطلب على

السيارات الجديدة . وتقدر تكاليف المصنع الكبير بمبلغ £3m والمصنع الصغير بمبلغ £1.4m ويقدر الدخل السنوي لكل حجم للمصنع حسب الطلب بما يلي :

حجم المصنع	الطلب	
	عالي	منخفض
كبير	1200	300
صغير	500	400

- وقد تم تقييم النتائج الممكنة التالية على أساس عمر افتراضى للمصنع ست سنوات .
- ١ - أن يكون الطلب عاليا في الستين الأولين ، ثم ينخفض . ولهذا الوضع احتمال هو 20%
 - ٢ - أن يكون الطلب عاليا في الستين الأولين ، ثم يبقى عاليا للسنوات الأربع التالية . واحتمال هذا الوضع 40%
 - ٣ - أن يكون الطلب منخفضا في الستين الأولين ، ثم يظل منخفضا طيلة السنوات الأربع التالية . واحتمال هذا الوضع 15% .
 - ٤ - أن يكون الطلب منخفضا في الستين الأولين ، ثم يرتفع خلال السنوات الأربع التالية . واحتمال هذا الوضع 25% .

والجدول التالي التكاليف الاستثمارية ، والدخل التقدي بالأسعار الحالية للحجمين الممكنين للمصنع وعند الطلب العالي والمنخفض .

حجم المصنع	الطلب	الدخل التقدي الصافي بالأسعار الحالية	
		المعين الأول والثاني (بالآلاف الجنيهات)	الأعوام الثالث حتى السادس (بالآلاف الجنيهات)
كبير	عالي	2088	3132
	منخفض	522	783
صغير	عالي	870	1305
	منخفض	696	1044

وقد تم حساب القيم الصافية بالأسعار الحالية للفرتين اللتين تغطيها التنبؤات بمعدل 10% سنويا ، وهو سعر الفائدة المتوقع .

والمطلوب :

- (أ) رسم شجرة القرار للميانات الموضحة أعلاه مع بيان الاحتمالات لكل فرع . ويجب تدعيم الشجرة بجدول للاحتمالات يبين بوضوح كيفية حسابها .
 - (ب) تقييم شجرة القرار . وتقديم النصح للإدارة عن المصنع الذى يجب انشاؤه اذا كان يجب انشاء أحدهما .
- (٢٢م أ - المهنى ١ - نوفمبر ١٩٧٩)

الفصل الرابع عشر

التوزيعات الاحتمالية

١٤ - ١ التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

كل الأمثلة الاحتمالية التي نظرت في الفصل الثاني عشر تحتوى بصفة عامة على توزيعات احتمالية منفصلة . ولكل تجربة هناك مجموعة منفصلة من النتائج الممكنة ، ولكل نتيجة احتمال مرتبط بها .

وبالنظر فنيا إلى المسألة نجد أنها قيم لمتغير عشوائى ناتج من تجربة يتبعها توزيع احتمالى ، وكمثال بسيط يوضح فكرة التوزيع الاحتمالى المنفصل هو قائمة التسجيل التى نحصل عليها عند رمى حجر نرد . فالمتغير يمكن أن يأخذ ستة قيم منفصلة 1,2,3,4,5 و 6 واحتمال كل نتيجة هو $\frac{1}{6}$.

وكمثال بسيط آخر للتوزيع الاحتمالى المنفصل هو مثال آلة الفاكهة الذى ذكر فى الفصل الثالث عشر ، حيث اعتبرنا آلة فاكهة لها ثلاثة دواليب بكل منها أربع تفاحات وموزة واحدة . النتيجة والأرباح المرتبطة بها كما يلى :

موزة	موزة	موزة	تفاح	30 صلة
تفاح	موزة	تفاح	تفاح	3 صلات
موزتان فى أى مكان		تفاح		5 صلات
كل الفريجات الأخرى		تفاح		0 صلة

(ج م - م - أسس ب - ديسمبر ١٩٧٨)

النتائج هى ترتيبات الضاح والموز ، والمتغير العشوائى هو عدد العملات المكتسبة . وعدد النتائج الممكنة هو 125 ولكن المتغير العشوائى يأخذ 4 قيم ممكنة هى 3,5,0 و 50 والاحتمالات المرتبطة بهذه القيم هى على التوالى : $\frac{1}{125}$, $\frac{16}{125}$, $\frac{12}{125}$ و $\frac{96}{125}$.

وتعبير « التوزيع الاحتمالى المنفصل » غالبا ما يستخدم فى معنى خاص أكثر مما فى الفقرة السابقة ، لأنه يستخدم للدلالة على مجموعة من الاحتمالات المرتبطة بقيم متغير عشوائى منفصل ناتج عن نوع خاص من التجارب . فمثلا ، توزيع ذات الحدين الذى درس فى البند ١٤ - ٢ فانه مثال لتوزيع احتمالى منفصل فى هذا المعنى . وقيم المتغير العشوائى المرتبط بتجربة تحقق شروطا عامة معينة تتبع هذا التوزيع ، لذلك بدراسة هذا التوزيع الاحتمالى المنفصل

نستطيع استنتاج التقدير حول الاحتمالات المرتبطة بكل التجارب التي تحقق هذه الشروط العامة . فمثلا توزيع بواسون الذي درس في البند رقم ١٤ - ٣ له نفس الشيء للتجارب التي تحقق مجموعة مختلفة من الشروط العامة .

وهذه التوزيعات مفيدة في الحياة العملية لأن مداها الواسع من الناحية العملية يؤدي إلى فهم لتغير عشوائي يتبع هذه التوزيعات ، والأمثلة والمسائل التي ذكرت ماضي إلا معادلة تمكس تنوع التطبيق .

١٤ - ٢ توزيع ذو الحدين

سنبدأ باعتبار مثال لموقف ما حيث يكون هذا التوزيع مناسباً ثم نعمم النتائج التي نحصل عليها .
 بائع للموسوعات من الباب للباب يظن ، من خبرة سابقة أنه اذا تمكن من دخول أي منزل فإنه يستطيع أن يبيع باحتمال 0.4 . فلذا دخل البائع خمسة منازل خلال فترة معينة فما هو احتمال أن يبيع ثلاث موسوعات بالضبط ؟
 احتمال البيع 0.4 ، فيكون احتمال عدم البيع $0.6 = 1 - 0.4$ ولكي يكون هناك ثلاث مبيعات بالضبط في خمسة منازل ، فإنه يجب أن يكون هناك ثلاثة مبيعات واثنين عدم بيع . ونفترض مبدئياً أن البيع في المنازل الثلاثة الاولى .
 لذلك

$$\begin{aligned} P(\text{عدم بيع} \cap \text{عدم بيع} \cap \text{بيع} \cap \text{بيع} \cap \text{بيع}) \\ = P(\text{عدم بيع}) \times P(\text{عدم بيع}) \times P(\text{بيع}) \times P(\text{بيع}) \times P(\text{بيع}) \\ = 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.6 \\ = (0.4)^3 \times (0.6)^2 \end{aligned}$$

نفرض أن البيع في المنزل الثاني ، والثالث ، والخامس

$$\begin{aligned} P(\text{بيع} \cap \text{عدم بيع} \cap \text{بيع} \cap \text{بيع} \cap \text{عدم بيع}) \\ = P(\text{بيع}) \times P(\text{عدم بيع}) \times P(\text{بيع}) \times P(\text{بيع}) \times P(\text{عدم بيع}) \\ = 0.6 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.4 \\ = (0.4)^3 \times (0.6)^2 \end{aligned}$$

بالمثل كل التوافيق الممكنة لثلاث حالات بيع ، وحالتين عدم بيع لها الاحتمال $(0.4)^3 \times (0.6)^2$. وهذه التوافيق متباينة عن بعضها . لذلك فان الاحتمال المطلوب للحصول على ثلاث حالات بيع بالضبط يوجد باضافة المشتركات $(0.4)^3 \times (0.6)^2$ مع بعضها لكل التوافيق المنفصلة . لذلك فان :

(عدد التوافيق لثلاث مرات بيع ومرتين عدم بيع من بين دخول 5 منازل) $\times (0.4)^3 \times (0.6)^2 = P(\text{بالضبط 3 مبيعات})$
 ولكننا نعلم من الفصل الثاني عشر ، البند ١٢ - ٦ أن عدد التوافيق لثلاث حالات بيع وحالتين عدم بيع ، من بين خمس حالات هو :

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

وبدلاً من ذلك فان ${}_5C_3$ يمكن إيجادها باستخدام مثلث باسكال . لذلك

$$\begin{aligned} P(\text{بالضبط 3 مبيعات}) &= {}_5C_3 (0.4)^3 (0.6)^2 \\ &= 10 \times 0.064 \times 0.36 \\ &= 0.23 \end{aligned}$$

اذن فالشروط العامة التي يجب توافرها عند اجراء تجربة لكي يطبق توزيع ذات الحدين هي كما يلي :

١- يجب أن يكون عدد مرات اجراء التجربة محدود وليكن n .

٢- كل تجربة لها نتيجتان ممكنتان « نجاح » أو « فشل »

٣- احتمال النجاح في كل تجربة ثابت ، وليكن P .

الشرط الأخير يدل على أن التجارب مستقلة عن بعضها .

ونلاحظ أن هذه الشروط متحققة في المثال السابق . نعتبر أن البالغ تمكن من دخول خمسة منازل ، لذلك فالشرط

(١) تحقق - ودخول كل منزل يترتب عليه إحدى التيجتين بيع ، أو عدم بيع ، لذلك فالشرط (٢) قد تحقق . واحتمال البيع في كل منزل متماثل وهو 0.4 ، ولذلك فالشرط (٣) قد تحقق أيضا .

عندما نتحقق الشروط (١) ، (٢) ، (٣) ، فإن عدد النجاح الممكن الحصول عليه عند اجراء التجربة n من

المرات يقال أنه يتبع توزيع ذات الحدين ، واحتمال الحصول على عدد محدود من النجاح من بين n من المحاولات هو :

$$P = {}^nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث r يمكن أن يأخذ إحدى القيم 0 ، 1 ، ، n وفي المثال السابق $n = 5$ ، $P = 0.4$ ، $r = 3$.

هناك جداول مطبوعة خاصة بتوزيع ذات الحدين لتوافيق مختلفة لقيم p و n ولكن لعدد محدود من هذه التوافيق

حتى لا يصبح الجدول كبيرا جدا . لذلك اذا دعت الحاجة إلى احتمالات ذات الحدين ، فإنه من الضروري غالبا حسابها باستخدام الصيغة السابقة .

من التطبيقات الشائعة لتوزيع ذات الحدين هي مراجعة الجودة في عينة لمعرفة المعيب منها ، والمثال التالي

يوضح ذلك .

مثال ١٤ - ٢ : مشروع معاينة يتضمن أخذ عينة مكونة من عشر وحدات من انتاج كل الكمية وترفض الكمية اذا وجد أكثر من وحدتين معيبتين في العينة . فلذا كان في الحقيقة خمسة في المئة من كل الوحدات معيبة فما هو احتمال رفض الكمية ؟

الاجابة: لكي نرفض الكمية يجب أن تحتوي العينة على 9,8,7,6,5,4,3 أو 10 من الوحدات المعيبة ، لذلك فإن احتمال الرفض يشمل ايجاد مجموع احتمالات هذه الاعداد المختلفة للمعيبات . وهذه عملية شاقة ، ولكن من الأفضل ايجاد احتمالات 2,1,0 معيبات ثم جمعها وطرح النتيجة من مجموع جميع الاحتمالات الممكنة وهو دائما 1 .

وهذه العملية تتبع توزيع ذات الحدين حيث $n = 10$ ، $p = 0.05$ لذلك

$$\begin{aligned} P \text{ (وحدتان معيبتان) } &= {}_{10}C_2 (0.05)^2 (0.95)^8 \\ &= \frac{10!}{2!8!} = 0.0025 \times 0.6634 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times 0.00166 = 0.0746 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \text{ (وحدة معيبة واحدة) } &= {}_{10}C_1 (0.05)^1 (0.95)^9 \\ &= \frac{10!}{1!9!} \times 0.05 \times 0.6302 = 10 \times 0.03151 = 0.3151 \end{aligned}$$

(ولا وحدة معية) P لا يحتاج لصيغة ذات الحدين لأن حسابها ببساطة هو احتمال عشرة من الحوادث المستقلة كل منها له الاحتمال 0.95 علما بأن $1 = 0!$ وهذه الحالة توافق النموذج العام لذات الحدين

$$P_0 \text{ (ولا وحدة معية) } = {}_{10}C_0(0.05)^0(0.95)^{10} \\ = \frac{10!}{0!10!} \times 1 \times 0.5987 = 1 \times 1 \times 0.5987 = 0.5987$$

لذلك فإن :

$$P(0) + P(1) + P(2) = P \text{ (واحدتان معيتان ، أو أقل) } \\ = 0.0746 + 0.3151 + 0.5987 = 0.9884$$

وبالتالى فإن:

$$P \text{ (رفض الكمية) } = P \text{ (أكثر من وحدتين معيتين) } \\ = 1 - 0.9884 = 0.0116$$

أى أن 1.16% من الكمية يمكن أن يرفض فى عملية المعاينة .

وتتضمن التمارين التالية تمرينا فى معاينة اللوطات وسؤالا خاصا بتدريب الأفراد .

تمرين ١٤ - ٢ - ١ : كمية من الوحدات تحتوى على 20% وحدات معية . أخذت عينة عشوائية مكونة من ست وحدات من الكمية ، باستخدام توزيع ذات الحدين أوجد احتمال أن ، العينة تحتوى على :
(أ) وحدة واحدة معية .
(ب) اثنتين ، أو أكثر من الوحدات معية .

تمرين ١٤ - ٢ - ٢ : كل دفعة تجنيد جديدة لرجال العسكرية فى منظمة أركان حرب معية تتلقى فترة تدريب يليها اختبار لتحديد اللائق للعمل الماهر . ونفترض أن المجندين يجتازون الاختبار باحتمال 0.8 فما هو احتمال أن مجموعة من بين عشرة من المجندين تفرز على الأقل سبعة لائقين للعمل الماهر ؟
(م ١١ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الوسط الحسابى والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين : يعرف الوسط الحسابى لتوزيع ما بأنه القيمة المتوقعة لتغير عشوائى يتمى لهذا التوزيع ، أى أنه القيمة المتوسطة المتوقعة أن يأخذها المتغير العشوائى عند إجراء التجربة عدد كبير من المرات . وفى حالة توزيع ذات الحدين هذه معنى اعتبار مجموعات متممة من n من المحاولات والمطلوب هو العدد المتوسط للنجاح فى كل مجموعة من n من المحاولات . ففى مثال بائع الموسوعات نجد أن 0.4 هو احتمال البيع فى كل منزل ، ولذلك ، فإنه فى مجموعة دخول خمسة منازل ، فإنه فى المتوسط يحصل على $5 \times 0.4 = 2$ من المبيعات .

عموما الوسط الحسابى لتوزيع ذات الحدين لعدد n من المحاولات ، وكل منها له احتمال النجاح p يحسب np .
وطبقا للصيغة العامة للقيمة المتوقعة التى درست فى البند ١٣ - ٢ . فالأساس المستخدم لحساب هذه القيمة هو

$$\sum_{r=0}^n r \times {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

ونتيجة هذا المجموع هو np والانحراف المعياري لتوزيع ماضو مقياس الاختلاف في قيمة المتغير العشوائي من محاولة إجراء التجربة لمحاولة أخرى . ولحسابه نستخدم نفس قاعدة حساب الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات ، أي إيجاد القيمة المتوقعة لـ $(\text{المتغير} - \text{الوسط الحسابي})^2$ ثم أخذ الجذر التربيعي للنتيجة . فبالنسبة لتوزيع ذات الحدين حيث لدينا n من المحاولات ، واحتمال p للنجاح في كل منها نجد

$$\sqrt{\sum_{r=0}^n (r - np)^2 \times {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}}$$

ونتيجة ذلك هو :

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{np(1-p)}$$

وفي حالة بائع الموسوعات حيث $n = 5$ ، $p = 0.4$ نجد أن

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{5 \times 0.4 \times 0.6} = \sqrt{1.2} = 1.095$$

هذا مقياس لاختلاف المبيعات المتوقعة للبائع من اختياره واحد من الخمس مدخل إلى آخر .

نفس النتائج التي طبقت للوسط الحسابي وللانحراف المعياري للتوزيع الذي درس في البند ٨ - ٦ وتطبق أيضا للوسط الحسابي ، وللانحراف المعياري للبيانات ، أي أنه يمكننا استخدام نتيجة تشيريف chebyshev حيث أنه في مدى له k من الانحرافات المعيارية فإن كل جانب من الوسط الحسابي يمكن التوقع بأنه يحتوي على الأقل نسبة

$$1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

من القيم المأخوذة لذلك على الأقل 75% من تكرارات التجربة تؤدي إلى قيمة لمتغير عشوائي ضمن قيمتين للانحراف المعياري عن الوسط الحسابي ، وعلى الأقل 89% من التكرارات تؤدي إلى قيمة ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي .

مثال ١٤ - ٢ : عشرة في المئة من انتاج شركة معينة للكبريت به عيوب . فهي تباع الكبريت في علب بكل منها 500 عود . ضمن أي مدى متماثل حول الوسط الحسابي تستطيع الشركة أن تتوقع أن 89% من العلب بها عدها من المعيب ؟

$$\text{الإجابة : } np = 0.1 \text{ و } n = 500$$

لذلك ، فإن العدد المتوسط للمعيب في كل علبه هو $np = 500 \times 0.1 = 50$ ، والانحراف المعياري هو

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{500 \times 0.1 \times 0.9} = \sqrt{45} = 6.7$$

لذلك ، فإنه على الأقل 89% من العلب يمكن التوقع بأنه يحتوي على عدد من الكبريت المعيب في المدى من $3 \times 6.7 - 50$ إلى $3 \times 6.7 + 50$ أي أن

$$50 - 20.1 \quad \text{أو} \quad 50 + 20.1$$

إنه على الأقل 89% من الملب ستحتوي على عدد من المعيب في مكان ما من المدى 30 إلى 70 .

تمرين ١٤ - ٣ : أعطت شركة في تجنيد مجموعة من 100 عامل للتدريب ، وكان معدل السقوط في منهج التدريب هو 50% ، ما هي الحدود التي يمكن أن يقع بينها عدد المجموعات الناجمة الناتجة من 75% على الأقل من المجموعات ؟

١٤ - ٣ التوزيع البواسوني

عند دراسة توزيع ذات الحدين كان الاهتمام بالتجارب التي لها عدد محدود n من مرات إجرائها وبعدد المرات التي يمكن الحصول فيها على نجاح . لذلك فإن متغير ذات الحدين يمكن أن يأخذ القيم $0, 1, 2, \dots, n$.

وعند دراسة توزيع بواسون يكون الاهتمام بعد حدوث ظاهرة ما في فترة زمنية والتي يمكن أن تحدث أي عدد من المرات خلال هذه الفترة . ومن الأمثلة على ذلك عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى السترال في دقيقة ما ، عدد الأخطاء في طباعة صفحة أو عدد غلايا الدم الحمراء في عينة 1 مليلتر من الدم . هذه المتغيرات العشوائية يمكن أن تأخذ القيم $0, 1, 2, 3, \dots$. لذلك ، فإن توزيع بواسون هو أيضا توزيع منفصل ، ولكن لا يوجد حد أعلى للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي . والشرط الذي يجب توافره في تجربة لتطبيق توزيع بواسون هو أن يكون عدد مرات حدوث الظاهرة في الفترة الزمنية المعنية عشوائيا تماما . التعبير الرياضي لهذا الشرط واستنتاج صيغة الاحتمال منه لاجابة لنا به الآن . لذلك سوف لانهول استنتاج الصيغة ، كما استنتجنا صيغة ذات الحدين وهي :

$$P(r \text{ من النتائج}) = {}^nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

ولكن سنذكرها فقط ثم نستخدمها . صيغة احتمال بواسون هي

$$P(r \text{ من الحوادث}) = \frac{m^r}{r!} e^{-m}$$

حيث m هو العدد المتوسط المتوقع لحدوث الظاهرة في فترة زمنية ذات حجم معين . وفي هذا التعبير e هي العدد 2.71828 والمقدار e^m يمكن ايجاده من الجدول ، أو حسابه بالآلة حاسبة (انظر البند ٢ - ٤) .

توزيع بواسون ذو أهمية في مشاكل الطواير البسيطة والشائعة . وسنبدأ أمثلة توزيع بواسون بدراسة أبسط مشاكل الطواير .

مثال ١٤ - ٣ : يأخذ القاعدون إلى طواير أماكنهم عشوائيا بمعدل 150 في الساعة . ما هو احتمال أن ثلاثة ، أو أكثر من الأشخاص سوف يصلون في دقيقة معينة ؟

الاجابة: طول الفترة الزمنية هو دقيقة واحدة . ومعدل الوصول هو 150 في الساعة ولذلك فإن العدد المتوسط للقاعدون في فترة زمنية طولها دقيقة واحدة هو

$$m = \frac{150}{60} = 2.5$$

باستخدام توزيع ذات الحدين من الأفضل أن نحسب الاحتمال (3 أو أكثر) P بإيجاد $P(0) + P(1) + P(2)$ ثم طرح هذا المجموع من الاحتمال الكلى ، وهو الواحد الصحيح ، وباستخدام توزيع بواسون نستخدم هذا المعنى أيضا بسبب غياب الحد الأعلى للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائى . لذلك فإن إجابة السؤال تكون أولا بحساب .

$$P(0 = \text{عدد القادمين}) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} = \frac{1}{1} e^{-2.5} = e^{-2.5} = 0.082$$

ثم بإيجاد

$$P(1 = \text{عدد القادمين}) = \frac{2.5^1}{1!} e^{-2.5} = \frac{2.5}{1} e^{-2.5} = 0.205$$

وأخيرا بإيجاد

$$P(2 = \text{عدد القادمين}) = \frac{2.5^2}{2!} e^{-2.5} = \frac{6.25}{2} e^{-2.5} = 3.125 e^{-2.5} = 0.257$$

لذلك ، فإن

$$\begin{aligned} P(\text{عدد القادمين 4 أو أكثر فى أى دقيقة ما}) \\ &= 1 - (0.082 + 0.205 + 0.257) \\ &= 1 - 0.544 = 0.456 \end{aligned}$$

وكمثال آخر اعتبر الآن حيث الفترة تكون مسافة بدلا من الزمن .

مثال ١٤ - ٣ - ٢ : الأخطاء المطبوعة فى إنتاج عمل شركة خاصة تحدث عشوائيا بمعدل متوسط 0.6 لكل صفحة .
ماهو احتمال أن سبع صفحات فى رسالة أعلنت بالشركة تحتوى على أكثر من ثلاث أخطاء ؟
الإجابة: متوسط عدد الأخطاء لكل صفحة هو 0.6 . لذلك فإن سبع صفحات من الرسالة تحتوى على العدد المتوسط $4.2 = 7 \times 0.6$ من الأخطاء .

$$P(0 \text{ أخطاء عندها}) = \frac{4.2^0}{0!} e^{-4.2} = \frac{1}{1} e^{-4.2} = e^{-4.2} = 0.015$$

$$P(1 \text{ خطأ واحد}) = \frac{4.2^1}{1!} e^{-4.2} = 4.2 e^{-4.2} = 4.2 \times 0.015 = 0.063$$

$$P(2 \text{ أخطاء عندها}) = \frac{4.2^2}{2!} e^{-4.2} = \frac{17.64}{2} \times 0.015 = 0.132$$

$$P(3 \text{ أخطاء عندها}) = \frac{4.2^3}{3!} e^{-4.2} = \frac{74.088}{6} \times 0.015 = 0.185$$

لذلك فإن

$$\begin{aligned} P(\text{الرسالة تحتوى على أكثر من 3 أخطاء}) \\ &= 1 - (0.015 + 0.063 + 0.132 + 0.185) \\ &= 1 - 0.395 = 0.605. \end{aligned}$$

هناك جداول مطبوعة لاحتمالات بواسون لقيم مختلفة للقيمة m . وحيث يوجد بارامتر واحد فقط ، فإن هذه الجداول يمكن تقديمها لمدى واسع من القيم ، وتعتبر لذلك ذات أهمية عملية ، لأنها تعد الطريق المادى لإيجاد احتمالات بواسون .

تمرين ١٤ - ٤ - ١ : تحدث في الدور السفلي لشركة حوادث بمعدل متوسط أربعة حوادث لكل اسبوع . أوجد احتمال حدوث أقل من ثلاثة حوادث خلال اسبوع معين .

تمرين ١٤ - ٤ - ٢ : تصل السفن عشوائيا الى ميناء بمعدل متوسط اثنين في اليوم ، وعلى الأكثر ثلاث سفن في اليوم . وفي يوم محدد اذا كانت تكاليف التسهيلات المقدمة £ 200 فانه يمكن زيادة عدد السفن إلى أربعة في اليوم . فلذا كان ربح السفينة هو £ 1000 فهل عملية زيادة عدد السفن تستحق الاهتمام ؟

الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع بواسون : هذه المقاييس لها نفس الأهمية مثل مقاييس توزيع ذات الحدين ، وتحسب بنفس القاعدة . والوسط الحسابي لتوزيع بواسون هو m . وإذا كان هناك عدد غير محدود من الفترات كل منها له الطول المعلوم ، فإن العدد المتوسط لحدوث الظاهرة في كل فترة هو m . والانحراف المعياري يقاس الاختلاف في عدد مرات حدوث الظاهرة من فترة إلى أخرى . ويكون الانحراف المعياري لتوزيع بواسون الذي له الوسط الحسابي m هو \sqrt{m} .

نفس النتائج العامة تطبق للوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع بواسون في حالة مجموعات البيانات كما طبقت في توزيع ذات الحدين .

١٤ - ٤ - التقريب البواسوني لتوزيع ذي الحدين

إذا كان لدينا تجربة ذات حدين (n من المحاولات ، ونتيجتين ، واحتمال النجاح ثابت في كل محاولة) حيث أن عدد المحاولات كبيرا إذا قورن بعدد مرات الحصول على نجاح ، فإن هذا يماثل تجربة بواسون . والحد الأعلى n لعدد النجاح يكون كبيرا لمثيله في الحدوث ، ويجب أن يكون لانهاى .

لهذا عندما يكون لدينا توزيع ذات الحدين بحيث أن احتمال النجاح p أقل من 0.1 ، فإن احتمالات ذات الحدين يمكن تقريبها إلى توزيع بواسون بوسط حسابي $np = m$ ويكون هذا الشرط مناسباً لأنه يشير إلى أن العدد المتوسط للنجاح في كل مجموعة من المحاولات n أقل من عشر العدد الممكن للنجاح n .

يعتبر هذا التقريب مفيداً عملياً ، لأن جداول احتمالات بواسون أشمل من جداول ذات الحدين .

مثال ١٤ - ٤ - ١ : تحتوى مكونات إنتاج شركة معينة على 16% وحدات معيبة ماهو احتمال أن صندوقاً به خمسون مكونة يحتوى على وحدتين ، أو أكثر معيبة ؟

الاجابة : هذه في الحقيقة مسألة ذات حدين . كل مكونات الصندوق هو مجموعة من $n = 50$ من المحاولات ، وكل محاولة لها نتيجتان حيث أن المكونة ممكن أن تكون معيبة أو غير معيبة .

واحتمال الحصول على نجاح (مكونة معيبة) هو $p = 0.016$ فمن قاعدة ذات الحدين يكون

P (عدد الوحدات المعيبة 2 أو أكثر)

$$= 1 - [P(0 \text{ عدد الوحدات المعيبة}) + P(1 \text{ عدد الوحدات المعيبة})]$$

$$= 1 - [(1 - 0.016)^{50} + 50C_1 (0.016)(1 - 0.016)^{49}]$$

$$= 1 - (0.984^{50} + 50 \times 0.016 \times 0.984^{49})$$

$$= 1 - (0.446 + 0.363) = 1 - 0.809 = 0.191$$

تقريب بواسون يشمل استخدام توزيع بواسون بوسط حسابى $m = np = 50 \times 0.016 = 0.8$

اذن

(عدد الوحدات المعيبة 2 أو أكثر) P

$$= 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{0.8^0}{0!} e^{-0.8} + \frac{0.8}{1!} e^{-0.8} \right]$$

$$= 1 - (0.449 + 0.359) = 1 - 0.808 = 0.192$$

التجهيزان متماثلتان جدا ولذلك فإن التقريب مناسب فى هذه الحالة حيث p صغيرة جدا .

لعمري ١٤ - ٤ : نسبة انتاج شركة من السلع المعيبة هو 0.5% تباع السلع فى صناديق بكل منها 100 وحدة ، والشركة تضمن إرجاع الصندوق الذى يحتوى على أكثر من وحدتين معيتين . وإرجاع مثل هذا الصندوق يكلف الشركة £2 فإذا فكرت الشركة فى خطة فحص للسلع مع استبعاد المعيب منها وكانت عملية الفحص تكلف 5 بنس لكل صندوق، استخدم تقريب بواسون لتوزيع ذات الحدين لتبين هل خطة الفحص تستحق الاهتمام ؟

١٤ - • التوزيعات الاحتمالية المتصلة

كل التوزيعات الاحتمالية السابقة هي توزيعات احتمالية منفصلة . مرتبطة بمتغيرات (عدد مرات الحصول على نجاح ، وعدد الحوادث الممكنة) يمكن أن تأخذ قيم متباعدة فقط ، كما وصفت فى البند ١٤ - ١ . وفى هذا الجزء نتعامل مع متغيرات غالبا ما تأخذ أى قيم على الأقل فى مدى معين ، وهذه المتغيرات تؤدي إلى فكرة التوزيعات الاحتمالية المتصلة وعند التعامل مع متغيرات التوزيعات المتصلة لا يمكن أن نتحدث عن احتمال أن المتغير يأخذ قيمة واحدة معينة ، كما كان الحال فى التوزيعات المنفصلة . كمثال على ذلك لا نستطيع أن نطلب احتمال أن شخص اختير عشوائيا وزنه 71.325 كجم أو شركة معينة تنتج قضيبا معدنيا طوله 2.7183 متر وفى حالة متغيرات التوزيعات المتصلة مثل هذه الاحتمالات للقيم الفردية تساوى دائما صفرا . ولكن ما نريده هو احتمال أن المتغير يأخذ قيمة فى مدى محدد . لذلك فالأمثلة تصبح ، احتمال أن وزن شخص يقع بين 68.4 كجم و 69.4 كجم أو احتمال أن طول القضيب يقع بين 3.74 متر و 3.78 متر .

لفهم حساب مثل هذه الاحتمالات تعتبر مرة ثانية البيانات المستخدمة فى البند ٧ - ١ قيم الفواتير التى أصدرت بشركة فى يوم معين كانت

£	£	£	£	£	£	£	£	£	£
17.35	6.80	9.05	14.80	24.70	23.45	29.90	9.95	15.90	22.40
16.45	11.50	17.55	18.60	9.40	13.35	26.60	6.65	10.25	19.00
23.95	18.45	12.70	19.05	15.15	18.30	15.16	12.80	23.40	5.55
8.75	18.80	20.45	15.80	22.50	19.10	14.55	11.15	16.35	26.60

في الفصل السابع جمعنا هذه الأشكال في جداول تكرارية لمختلف الأنواع . والرسوم البيانية تعتمد على الجداول . من هذه البيانات يمكننا استنتاج جدول التوزيع التكرارى كما يلى :

التكرار	الفترة
1	من £2 وأقل من £6
6	من £6 وأقل من £10
6	من £10 وأقل من £14
10	من £14 وأقل من £18
8	من £18 وأقل من £22
6	من £22 وأقل من £26
3	من £26 وأقل من £30

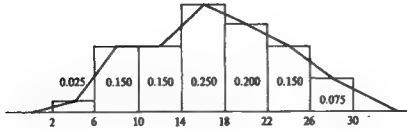
المدرج التكرارى ، والمضلع التكرارى المرسومان في البند ٧-٧ يعتمدان على هذه الجداول ، وأيضاً في البند ٧-١ الجدول التكرارى يتحول إلى جدول التكرار النسبى و جدول التوزيع التكرارى يمكن تحويله إلى جدول التكرار النسبى كما يلى :

$$\frac{\text{تكرار النسبى}}{\text{التكرار الكلى}} = \text{تكرار النسبى}$$

التكرار النسبى	الفترة
0.025	من £2 وأقل من £6
0.150	من £6 وأقل من £10
0.150	من £10 وأقل من £14
0.250	من £14 وأقل من £18
0.220	من £18 وأقل من £22
0.150	من £22 وأقل من £26
0.075	من £26 وأقل من £30
المجموع = 1	

ويمكن رسم المدرج التكرارى ، والمضلع التكرارى بالاستعانة بهذا الجدول كما هو موضح في الشكل ١٤-١ ، ونلاحظ أن مساحة كل مستطيل في المدرج التكرارى تتناسب مع التكرار النسبى المفهم في الفترة المناظرة والمساحة الكلية للمدرج التكرارى تتناسب مع التكرار النسبى الكلى ، أى مع الواحد الصحيح . وهذه هى نفسها المساحة الكلية للمضلع التكرارى .

نفرض أننا نريد عدد الفترات بتقسيم أفق للمدى ، الى فترات طولها £2 وبالتالي فإن جدول التوزيع النسبي يمكن الحصول عليه .



شكل ١٤ - ١

التكرار النسبي	الفئة
0.025	من £4 وأقل من £6
0.050	من £6 وأقل من £8
0.070	من £8 وأقل من £10
0.080	من £10 وأقل من £12
0.100	من £12 وأقل من £14
0.130	من £14 وأقل من £16
0.120	من £16 وأقل من £18
0.110	من £18 وأقل من £20
0.090	من £20 وأقل من £22
0.080	من £22 وأقل من £24
0.070	من £24 وأقل من £26
0.050	من £26 وأقل من £28
0.025	من £28 وأقل من £30

المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لهذا الجدول للتكرار النسبي موضحة ، فى الشكل ١٤ - ٢ ، مرة أخرى مساحة كل مستطيل فى المدرج التكرارى يمثل التكرار النسبي للقيم فى الفترة المناظرة والمساحة الكلية للمدرج التكرارى ، والتي هى المساحة تحت المضلع التكرارى تتناسب مع التكرار النسبي الكلى ، وهو الواحد الصحيح .

نصور أن هذه العملية استمرت حيث لدينا المجتمع ككل فإنه أصبح فى استطاعتنا تقسيم المدى إلى عدد لانهاى من الأقسام الصغيرة . ففى هذه الحالة سيصبح المضلع التكرارى النسبي منحني أملس ، والمساحة تحته بين أن قيمتين سوف تمثل احتمال أن المتغير يأخذ قيمة فى هذا المدى . هذه الحالة النهائية للمثال موضحة فى الشكل ١٤ - ٣ . والمساحة المظللة هى احتمال أن القيمة تقع بين £21.50 و £24.20 .



شكل ١٤ - ٧



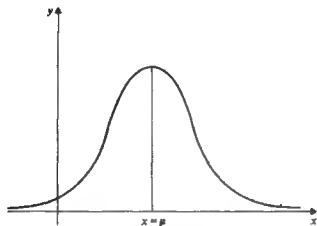
شكل ١٤ - ٧

كل متغير يتبع التوزيع المتصل يرتبط به منحني من هذا النوع يسمى منحني دالة كثافة الاحتمال (د . ك . أ) وترتبط احتمالات المتغيرات ذات التوزيع المتصل بالمساحات تحت منحني دالة كثافة الاحتمال . وسوف نتناول أمثلة على ذلك في البنود ١٤ - ٦ و ١٤ - ٧ .

١٤ - ٦ التوزيع الطبيعي

هذا التوزيع هو أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداما . والسبب في ذلك هو أن توزيعات كثيرة لمتغيرات مثل الطول ، والوزن ، والزمن (تقريبا على الأقل) تتبع توزيعات طبيعية . والسبب الثاني والرئيسي لأهمية التوزيع الطبيعي ، ينتج من النتيجة الرياضية التي تسمى بنظرية النهاية المركزية ، وغلاصة هذه النظرية أنه إذا أضفنا عددا كبيرا كليا من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة في التوزيع إلى بعضها بأي طريقة فإن توزيع المجموع سيكون تقريبا هو التوزيع الطبيعي . وهذا له استنتاجات عملية عظيمة في نظرية المعاينة حيث أنها تخبرنا بأنه عند أخذ عينات عشوائية كبيرة كليا لمتغير ذات أي توزيع فإن متوسطات المعاينة سوف يكون لها - تقريبا - التوزيع الطبيعي وسوف يتضح أهمية هذا في الفصول اللاحقة . عموما أنظر الجزء ١٥ - ١ .

ومنحني دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي له خاصية «شكل الجرس» كما في شكل ١٤ - ٤ .



شكل ١٤ - ٤

وشكل الجرس يتحدد تماماً لاي توزيع طبيعي خاص اذا علمنا الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ لهذا التوزيع .

وقدمة μ تخبرنا بمكان مركز الجرس وقيمة σ تخبرنا بكيفية الانتشار حوله . لهذا ، فإن القيمة الصغيرة لـ σ تعنى أنه لدينا جرس طويل مدبب بينما القيمة الكبيرة لـ σ تعنى أن الجرس قصير ومفترطح . ولاحظ أن المساحة الكلية تحت كل جرس يجب أن تكون الواحد الصحيح حيث أننا نتحدث عن منحنى دالة كثافة الاحتمال وذلك ، فإن المساحة الكلية تحته تمثل الاحتمال الكلى .

وإذا كان لدينا توزيع طبيعي ذو وسط حسابي μ وانحراف معياري σ فإن معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال له تكون على الصورة التالية

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

أنه من غير المستحب استخدام هذا التعبير الصعب ولكننا ذكرناه لتؤكد أن لدينا الآن معلومات كاملة عن منحنى دالة كثافة الاحتمال .

والعمل على إيجاد المساحات تحت منحنيات دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي كحساب الاحتمالات هو أسهل بكثير من حسابها باستخدام معادلة المنحنى ، والتي تحتاج الى حاسب آلي ، أو على الأقل آلة حاسبة الكترونية . ومن السهل إيجاد المساحات بواسطة الحقيقة الهامة الآتية :

المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي وراء عدد محدد للانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي دائماً واحدة ، دون النظر إلى قيم خاصة للانحراف المعياري والوسط الحسابي

لهذا فإن مسائل التوزيع الطبيعي يمكن حلها بحساب عدد من الانحرافات المعيارية وبالقيمة التي تختلف عن الوسط الحسابي ، ثم بالبحث في الجدول عن المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال وراء عدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي .

مثال ١٤ - ٦ - ١ : وحدات مصنعة تباع في صناديق ويحتوى كل صندوق على وزن 40 أوقية على الأقل . والوزن الحقيقي للصندوق متغير ، يتبع التوزيع الطبيعي التقريبي بوسط حسابى 41.2 أوقية وانحراف معيارى 0.8 أوقية . المطلوب هو :

- ١ - حساب نسبة الصناديق التى وزنها يقع بين 40 أوقية و 42 أوقية .
- ٢ - كل الصناديق التى تحتوى على اقل من 40 اوقية يستثنى عنها بمبلغ £1 لكل صندوق . أحسب قيمة الصناديق التى يستثنى عنها عند بيع 100 صندوق .

(ح م م - أساس ب - يونيو ١٩٨٠)

الإجابة المنحني دالة كثافة الاحتمال لهذا المثال كما فى شكل ١٤ - ٥ . عدد الانحرافات المعيارية بين 40 و 41.2 هى

$$\frac{41.2 - 40}{0.8} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

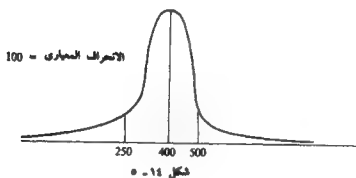
بالإشارة الى جداول المساحة اللاحقة بالتوزيع الطبيعي نجد أن المساحة تحت المنحني وراء 1.5 من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابى هى 0.0668 .

عدد الانحرافات المعيارية بين 41.2 و 42 هى

$$\frac{42 - 41.2}{0.8} = \frac{0.8}{0.8} = 1$$

من الجداول نجد أن المساحة وراء الانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى 0.1587 . لذلك ، فإن المساحة بين 40 و 42 توجد بطرح هاتين المساحتين من المساحة الكلية تحت المنحني . أى أن

$$1 - 0.0668 - 0.1587 = 0.7745$$



ونتيجة ذلك نجد أن

- ١ - نسبة الصناديق التى تقع أوزانها بين 40 أوقية ، 42 أوقية هى 0.7745 .
- ٢ - الانتاج الكلى لاتمام بيع 100 صندوق هو T . نسبة البيع من الانتاج هى $0.9332 = 1 - 0.0668$ حيث أننا وجدنا سابقا أن النسبة 0.0668 تزن اقل من 40 أوقية . لذلك فإن $100 = 0.9332T$ والى منها نجد أن $T = 107.158$. إذن عدد ما يلقى من بيع 100 صندوق هو 7.158 وبالتالى : فإن القيمة هى £7.16 .

فى بعض المواقع يكون استخدام جداول التوزيع الطبيعي غير ضرورى ، والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال ١٤ - ٦ - ٧ : بطاقة على وعاء به سائل كيميائي تشير إلى أن سعر البيع 10 بنسات لكل لتر ، وأن الوعاء يحتوي على 10 لترات . على أن معلومات الملاء لا تستطيع ملء كل وعاء بنفس الحجم من السائل تماما . فالحجم موزعة طبيعيا ولها انحراف معياري قيمته 0.2 لتر ، والذي يعمل على أنه ثابت ، ولكن متوسط الملاء (وهو حاليا 10 لترات) ممكن تعديله - نظام التعديل يتطلب أن الأوعية التي تحتوي على أقل من 10 لترات لا تزيد على واحد في المائة .

ثم أدخلت إحدى الشركات تعديلا مناسبيا على معدات الملاء ، والتي غيرت الانحراف المعياري إلى 0.15 من اللترات . عملية التعديل تتكلف £5000 ، والتي تحتاج إلى استبدال بعد ملء 100 000 وعاء .

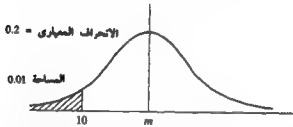
المطلوب هو :

- (أ) تعيين المستوى الذي يجب أن يوضح عنه متوسط الملاء لكي يقابل النظام بدون استخدام التعديل .
(ب) نصح الإدارة إذا كان التعديل يستحق الشراء .

(م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٨)

الاجابة

- (أ) الشكل البياني لهذا المطلوب موضحا كما في شكل ١٤ - ٦ . نفرض أن متوسط الملاء المطلوب وضعه بدون استخدام التعديل هو



شكل ١٤ - ٦

بالبحث في جداول التوزيع الطبيعي ، نجد أن العدد الأكثر دقة الذي له المساحة 0.01 يقع خلفه 2.33 انحرافات معيارية من الوسط الحسابي . لذلك في هذا المثال ، فإن القيمة 10 يجب أن تكون 2.33 انحرافات معيارية من m . لهذا فإن $m = 10 + 2.33 \times 0.2$ حيث قيمة الانحراف المعياري هي 0.2 إذن

$$m = 10 + 0.466 = 10.466$$

متوسط الملاء يجب أن يكون 10.466 لتر لكل وعاء .

- (ب) الشكل البياني لهذا المطلوب موضحا ، كما في شكل ١٤ - ٧ . نفرض أن متوسط الملاء المطلوب وضعه بالتعديل هو x ولنفس السبب كما في اجابة الجزء (أ) نجد أن

$$x = 10 + 2.33 \times 0.15 = 10 + 0.3495 = 10.3495$$

متوسط الملاء يجب أن يكون 10.3495 لتر لكل وعاء . ولهذا فإنه في 100 000 وعاء يكون عدد اللترات التي توافرت كنتيجة للتعديل هو في المتوسط

$$100\,000 \times (10.466 - 10.3495) = 100\,000 \times 0.1165 = 11\,650 \text{ لترات}$$

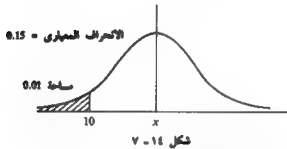
وكل لتر يور يباع بالقيمة 10 بنس وهذا يساوي $11\,650 \times 0.1 = £1165$ وهذا يعتبر أقل من £5000 لكل 100 000 وعاء نحتاجه لتنفيذ التعديل ، وعلى ذلك تكون النصيحة للإدارة هي أن هذا لا يستحق الاهتمام .

تعيين ١٤-٦-١ : صاحب مصنع وجد أنه بالرغم من أنه وعد بتسليم وحدات معينة في مدة 7 أسابيع ، فإن الوقت الذي يأخذه لتسليم العملاء تقريبا له التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 6 أسابيع وانحراف معياري أسبوعين .

المطلوب :

- ١- ماهي نسبة العملاء الذين يتسلمون وحداتهم متأخرة ؟
 - ٢- ماهي نسبة العملاء الذين يتسلمون وحداتهم من 4 إلى 7 أسابيع ؟
 - ٣- لأي صورة يجب أن يعدل اليها وعد التسليم اذا كان المطلوب أن 20% فقط من الوحدات يجب أن تتأخر ؟
 - ٤- ماهي نسبة العملاء الذين سوف يتسلمون وحداتهم خلال 5 أسابيع اذا انقص صاحب المصنع الانحراف المعياري للتسليم إلى أسبوع واحد مع الاحتفاظ بمتوسط الزمن عند 6 أسابيع ؟
- (ج ٢٢ - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

تركيبات التوزيعات الطبيعية : في بعض الأحيان يكون من الضروري ضم متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له التوزيع الطبيعي مع بعضها . وأبسط تركيب هو جمع المتغيرات مع بعضها . سنبدأ بهذه الحالة ونشرحها باستخدام متغيرين عشوائيين . من السهل تعميم النتائج الى عدد أكبر من المتغيرات العشوائية . نفترض أن لدينا المتغير العشوائي X الذي له التوزيع الطبيعي بوسط μ_1 وانحراف معياري σ_1 والمتغير العشوائي Y الذي له التوزيع الطبيعي بوسط μ_2 وانحراف معياري σ_2 ، X و Y مستقلان . سنهتم بالمتغير الجديد $X + Y$.



والشيء المهم في المتغير $X + Y$ والذي يبدو واضحاً أن $X + Y$ يتبع التوزيع الطبيعي . أهمية هذا بسبب أن هذه الظاهرة خاصة بالتوزيع الطبيعي ، كمثال ، اذا أضفنا متغيرين مستقلين لكل منهما توزيع ذي الحدين إلى بعضهما ، فإن الناتج لا يكون له التوزيع ذي الحدين ، أو اذا أضفنا متغيرين مستقلين كل منهما له توزيع بواسون إلى بعضهما ، فإن الناتج لا يكون له عموماً توزيع بواسون .

والآن اذا أضفنا أي متغيرين مستقلين (دون النظر إلى توزيعهما) إلى بعضهما فإن الوسط الحسابي للمجموع هو كما نتوقع مجموع الوسطين . لهذا في هذه الحالة الوسط الحسابي للمتغير $X + Y$ هو $\mu_1 + \mu_2$.

أيضا اذا أضفنا أي متغيرين مستقلين إلى بعضهما فإن تباين المجموع هو مجموع تباينهما . ولهذا في هذه الحالة فإن تباين $X + Y$ هو $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ وبالتالي يكون الانحراف المعياري للمتغير $X + Y$ هو : $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

المخلاصة : أن لدينا المتغير $X + Y$ له التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $\mu_1 + \mu_2$ وانحراف معياري

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

مثال ١٤-٦-٣ : تجميع ما لانتاج كميات كبيرة يتكون من ثلاث مركبات مختلفة . وزن كل مركبة له تقريبا التوزيع

الطبيعي بوسط حسابي وانحراف معياري كما يلي :

مركبة	الوزن (بالأرطال)	
	وسط	انحراف معياري
A	3.0	0.2
B	2.5	0.2
C	6.0	0.4

المطلوب هو :

(١) ماهو نسبة التجميع التي

(أ) تزيد عن 11.8 رطل .

(ب) بين 11.4 و 11.7 رطل ؟

(٢) نجميع مايزيد أكثر من 11.8 رطل غير كاف واستبعد . حين وسيط الوزن للتجميع الكافى .

(ج م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

الاجابة : هذا المثال يتطلب ثلاثة متغيرات مستقلة لها التوزيع الطبيعى ، وتضاف إلى بعضها .

نرمز لوزن المركبات A, B, C بالرموز W_1, W_2, W_3 على التوالى . لهذا فالمتغير الذى نهتم به هو :

$W_1 + W_2 + W_3$. وبالنظر إلى ماسبق نرى أن $W_1 + W_2 + W_3$ له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى :

$11.5 = 0.3 + 2.5 + 6.0$ وانحراف معياري

$$\sqrt{0.2^2 + 0.2^2 + 0.4^2} = \sqrt{0.24} = 0.49.$$

وبمعرفة هذا التوزيع نستطيع الاجابة عن الأسئلة المطلوبة .

(١) (أ)

$$\frac{11.8 - 11.5}{0.49} = \frac{0.3}{0.49} = 0.6$$

أى أن ، 11.8 تكون له 0.6 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى . والمساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى عند 0.6 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى من الجداول هى 0.274 ، أى أن 27.4% من التجميع يزن أكثر من 11.8 رطل .

(ب)

$$\frac{11.7 - 11.5}{0.49} = \frac{0.2}{0.49} = 0.4$$

والمساحة بعد 0.4 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى هى 0.3446 .

$$\frac{11.5 - 11.4}{0.49} = \frac{0.1}{0.49} = 0.2$$

والمساحة بعد 0.2 انحراف معياري عن الوسط الحسابى هى 0.4207 . ولهذا فإن المساحة تحت المنحنى بين 11.4 و 11.7 هى $0.2347 = 0.3446 + 0.4207$ ، أى أن 23.47% من التجميعات يزن بين 11.4 و 11.7 رطل .

(٢) (أ) نرى من إجابة (أ) أن المساحة الكلية تحت 11.8 رطل هى $0.726 = 1 - 0.274$ — 1 نصف هذا هو 0.363 . ولذلك بالبحث عن الوسيط للوزن للتجميعات الكافية يتطلب الوزن الذى يختصر المساحة 0.363 فى الطرف

المتخفيض. باستخدام الجدول المكسبة نرى أن العدد الذى يختصر ذلك هو 0.35 انحراف معيارى تحت الوسط الحساب . أذن فى هذه الحالة تكون القيمة المطلوبة هي $11.33 = 0.49 \times 0.35 - 11.5$ ، أى أن وسط الوزن للتجميعات الكافية هو 11.33 من الأبطال .

تمرين ١٤ - ٦ - ٢ : نوع خاص من الوحدات يتم انتاجه اولاً على الماكينة A ثم على الماكينة B . والأزمة التى تبتذل فيها كل ماكينة مستقلة عن بعضها ، ولها التوزيع الطبقى بوسط حسابى 10.4 ساعة وانحراف معيارى 1.2 ساعة بالنسبة للماكينة A وبوسط حسابى 12.6 ساعة وانحراف معيارى 1.8 ساعة بالنسبة للماكينة B ؟

المطلوب هو :

- (١) ما هو الزمن الذى يأخذه انتاج وحدات متوسطة على الماكيتين A و B ؟
 - (٢) ما هى نسبة الشغل الذى يأخذ أكثر من 11 ساعة على A ؟
 - (٣) ما هى نسبة الشغل الذى يأخذ أكثر من 11 ساعة على A وأقل من 13 ساعة على B ؟
 - (٤) ما هى نسبة الشغل الذى يأخذ أكثر من الزمن المركب 25 ساعة على الماكيتين ؟
- (ح م - م - أساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

الصيغة العامة « للارتباط الخطى » لمتغيرين عشوائيين X و Y هي $aX + bY$ حيث أن a و b أى ثابتين . أبضا التعميم لأكثر من متغيرين ممكن . بالنظر إلى المجموع نجد أننا نتناول الحالة الخاصة عندما $a = 1$ و $b = 1$.

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان مستقلان ولهما التوزيع الطبقى X (بوسط حسابى μ_1 وانحراف معيارى σ_1) و Y (بوسط حسابى μ_2 وانحراف معيارى σ_2) فإن $aX + bY$ له التوزيع الطبقى بوسط حسابى $b\mu_2 + a\mu_1$ وانحراف معيارى $\sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}$.

لاحظ أن ذلك يؤول إلى الحالة السابقة عندما $a = 1$, $b = 1$.

مثال ١٤ - ٦ - ٤ : اسطوانات تتج بطريقة معينة ، أطوالها تتبع التوزيع الطبقى بوسط حسابى 30 سم . وانحراف معيارى 1.5 مم تثبت الاسطوانات على هيئة أزواج على مرآة . أوجد النسبة المئوية للأسطوانات الأربع الناتجة ظاهرياً والتي لها الأطوال بين 118 مم و 122 مم .

الاجابة : نرمز لطول الاسطوانة السفلى بالرمز X ولطول الاسطوانة العليا بالرمز Y أذن الطول الظاهري للأسطوانات الأربع هو $2X + 2Y$.

وهذا له التوزيع الطبقى بوسط حسابى 120 مم $= 60 + 60 = 2 \times 30 + 2 \times 30$ وانحراف معيارى

$$\sqrt{2^2 \times 1.5^2 + 2^2 \times 1.5^2} = \sqrt{4 \times 2.25 + 4 \times 2.25} = \sqrt{18} = 4.2426 \text{ mm.}$$

$$\frac{122 - 120}{4.2426} = \frac{2}{4.2426} = 0.4714$$

والمساحة وراء هذا العدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابى هي 0.3192 ، أى أن المساحة فوق 122 مم هي 0.3192 بالمثل المساحة أسفل 118 مم هي 0.3192 لهذا فإن المساحة بين 118 و 122 هي $1 - 2 \times 0.3192 = 0.3616$ والنسبة المئوية للأسطوانات الأربع الظاهرة ، والتي لها الأطوال فى المدى 118 مم إلى 122 مم هي 36.16% .

نمرين ١٤ - ٦ - ٣ : قضيت اسطوانى لائق لدخول ثقب دائرى . الاثنان توزيعهما طبيعى وقطر القضيب له الوسط الحسابى 50.1 مم وانحراف معيارى 0.3 مم والثقب له الوسط الحسابى 51.1 مم وانحراف معيارى 0.4 مم فلذا اختيرت الوحدات عشوائيا لعملية التجميع فما هى نسبة الثقب التى تكون غير لائقة (ارشاد : $\sigma = 1$, $b = -1$)

١٤ - ٧ تقريب التوزيع الطبيعى الى توزيع ذى الحدين

نفرض أن لدينا تجربة ذات حدين حيث عدد المحاولات لاجرائها n كبيرا واحتمال النجاح p فى كل محاولة يقترب من 0.5 لهذا التوزيع تقريبا متماثل . لذلك فإن احتمالات ذات الحدين للحصول على عدد محدود من النجاح فى n من المحاولات يمكن تقريبها باستخدام التوزيع الطبيعى بنفس الوسط الحسابى والانحراف المياري ، كما فى توزيع ذات الحدين المناسب .

ونسق القيم المطلوبة لـ n و p لكى يكون التقريب معقولا ومناسبا ويمكن وصفه بالقول أن p يجب أن يكون فى المدى .

$$0.1 < p < 0.9$$

وأيا كلاً من $np > 5$ و $n(1 - p) > 5$

فكلما كان p قريبا من 0.5 قلت الحاجة الملحة الى الحجم n للحصول على تقريب معقول .

وتقريب التوزيع الطبيعى الى توزيع ذات الحدين هو تقريب مفيد لأن جدول التوزيع الطبيعى يمكن استخدامه لاي مسألة لها توزيع طبيعى بينما جدول توزيع ذات الحدين يحتاج الى تفهيد شديد . لذلك فإن حل المسائل باستخدام توزيع ذات الحدين يماثل حساب كامل لاحتمالات ذات الحدين . وهذا ممكن أن يكون شاقا جدا .

وفى تقريب توزيع ذات الحدين بالتوزيع الطبيعى نشأ صعوبة لاتحدث عند تقريب توزيع ذات الحدين بتوزيع بواسون فى البند ١٤ - ٤ . هذا يتج من حقيقة أن توزيع ذات الحدين توزيع منفصل بينما التوزيع الطبيعى توزيع متصل . لذلك عند اعتبار تجربة ذات حدين فتحدث عن احتمال الحصول على 3 مرات نجاح أو 4 مرات نجاح مثلا فى n من المحاولات ، لكن التوزيع الطبيعى ، كتوزيع متصل ، لايسمح لنا بالتحدث عن احتمالات قيم منفردة مثل توزيع ذات الحدين فبالأحرى أن نتكلم عن احتمالات مدى معين للقيم . والمعالجة لذلك هى النظر الى المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $m - \frac{1}{2}$ و $m + \frac{1}{2}$ (لاي عدد كلى m) كما لو كانت تنتمى للعدد الخاص m . لهذا اذا أردنا معرفة احتمال 3 مرات نجاح نوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $2\frac{1}{2}$ و $3\frac{1}{2}$.

وبالمثل (3 نجاحات أو أكثر) p يوجد بحساب المساحة تحت المنحنى الطبيعى فوق $2\frac{1}{2}$ (لأن احتمال 3 متضمن) بينما (أكثر من 3 نجاحات) p يوجد بحساب المساحة تحت المنحنى الطبيعى فوق $3\frac{1}{2}$ (لأن احتمال 3 ليس متضمنا) .

واضافة أو طرح $\frac{1}{2}$ بالتخصيص ، فى مثل هذه الحالات يشير الى أن التصحيح المتصل ضرورى ، لأن التوزيع المنفصل يقرب إلى توزيع متصل .

مثال ١٤ - ٧ - ١ : كل عضو جديد يجند لاعداد موظفين لهية خاصة يستغرق فترة للتدريب ، ثم يؤدى اختبار لكى

يحدد أنه أهل للعمل الماهر . فإذا كان 80% من المجتدين اجتازوا الاختبار فما هو احتمال أنه من بين مجموعة خاصة من 100 من المجتدين فإن 72 أو أقل سوف يجتازون الامتحان ؟

(م ١١ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الإجابة : هو مجال ذات حدين حيث $n = 100$ و $p = 0.8$ والشروط المطلوبة لكي يكون التقريب الطبيعي صحيحا متحققا . كما يجب أن نستخدم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $np = 100 \times 0.8 = 80$ وانحراف معياري

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2} = \sqrt{16} = 4.$$

ولكن تقريب احتمال 72 أو أقل ليجتازوا الاختبار فاننا نحتاج الى إيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي تحت 72.5 . وهذا يشمل احتمال 72 .

$$\frac{80 - 72.5}{4} = \frac{7.5}{4} = 1.875$$

لهذا 72.5 له 1.875 انحراف معياري تحت الوسط الحسابي . ومن الجداول نجد أن المساحة تحت المنحنى خلف 1.875 انحراف معياري عن الوسط الحسابي هي 0.0301 أي أن 0.0301 = (أو أقل قد اجتازوا الاختبار) P

تعرين ١٤ - ٧ - ١ : زمن وصول كاتب حسابات للعمل له التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 08.55 ساعة ، والانحراف المعياري 5 دقائق . وأزمة الوصول في مختلف الأيام مستقلة ، وزمن العمل الرسمي هو الساعة 09.00 ، وهناك 240 يوم عمل في السنة . أوجد احتمال أنه وصل متأخرا مدة تزيد على 45 يوما في سنة معلومة .
(م ١١ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٧)

تعاريف

١٤ - ١ تشير سجلات البضائع الداخلة لأحد أقسام مصنع كبير إلى أن المدة المتوسطة للوريات التي تصل كل أسبوع هو 248 . ومن المعلوم أن التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 26 .
فإذا كان هذا النموذج للوصول مستمرا ، فما هي النسبة المئوية لعدد الأسابيع المتوقعة للحصول على عدد نقلات .

(١) أقل من 229 كل أسبوع ؟

(٢) أكثر من 280 كل أسبوع ؟

(م ١ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٥)

١٤ - ٢ عند اختيار ممرضات للعمل في مستشفى فإن المتوقع أن 50% من المتطلمات سوف يتم تدريبهن ، ويحصلن على اللياقة الفنية المناسبة . ماهو احتمال أن

(١) من بين مجموعة من 5 مجندات ، أن 3 أو أكثر سوف يفشلن في اللياقة ؟

(٢) من بين مجموعة من 25 مجنبة ، أن 15 أو أكثر سيفشلن في اللياقة ؟

(٣) من بين أربع مجموعات متتالية من 25 مجنبة ، أن 15 أو أكثر في كل مجموعة سيفشلن في اللياقة ؟

(٤) من بين مجموعة من 100 مجنبة ، أن 60 أو أكثر سيفشلن في اللياقة ؟

ملاحظة : استخدم طريقة التقريب في الحساب إذا كانت مناسبة .

(م ١١- الجزء الأول- نوفمبر ١٩٧٤)

١٤- ٣ كجزء احصائي من دراسة أحد الأمراض ، وجد أن 100 مريض يحتاجون الى استشارة طبيب العائلة عدة مرات خلال الاثنى عشر شهرا الماضية . وأعداد المرضى الذين لهم 3,2,1,0 و 4 أو أكثر من الاستشارات هي على التوالي 8,10,16,46 و 20 وقد اقترح أن هذه الاستشارات تتبع عملية بواسون بمعدل تغير λ (لكل سنة) .

فإذا كان هذا الاقتراح صحيحا ، فاكذب تعبيرات بدلالة λ للنسب المتوقعة للمرضى الذين يحتاجون الى 3,2,1,0 و 4 أو أكثر من الاستشارات

(١) سنويا .

(٢) لفترة تزيد على ستين .

(م ١١- الجزء الأول- يونيو ١٩٧٥)

١٤- ٤ الخريجون المرشحون للعمل في منظمة ما يقضون فترة زمنية قصيرة في كل قسم رئيسي وتجا لتقديمهم يرسلون للتدريب على برنامج في الادارة وإذا اجتازوا هذه الدورة بنجاح فانهم يعينون في وظائف ثابتة ، ومن التجارب السابقة وجد أن 20 في المائة من المرشحين ترفض خلال الفترة التي يقضونها في الأقسام و 75 في المائة من المتبقين لا يجتازون الدورة التدريبية . بفرض أنه يرشح شخص واحد في المرة لشغل مكان (المشرح في الدورة التدريبية يعتبر شاغلا لمكان) وإن تقدم المرشح لا يتأثر بتقدم الذين سبقوه ، استنتج تعبيرات لاحتمال الأحداث التالية :

(أ) سبعة من العشرة المرشحين يأخذون وظيفة ثابتة .

(ب) على الأقل واحد من العشرة المرشحين يأخذ وظيفة ثابتة .

(م ١١- الجزء الأول- يونيو ١٩٧٥)

الفصل الخامس عشر

التقدير

١٥- ١ توزيع المعاينة للوسط

هناك أحوال كثيرة يتميز فيها فحص كل القيم في المجتمع . وبالتالي من المعقول أخذ عينة من هذا المجتمع وعمل بعض البيانات الاستدلالية عن هذا المجتمع . ومن المتوقع حدوث بعض الخطأ بسبب أنه ليست جميع قيم المجتمع لا يمكن مشاهدتها ولكن وبحذر يمكن أن يكون هذا الخطأ بسيطاً . وقد سبق شرح طرق عديدة لأخذ عينات من مجتمع ما في الفصل الخامس . وفي هذا الفصل والفصول التالية نفرض أن العينة يتم اختيارها عشوائياً ، أي أن كل عضو في المجتمع له نفس الفرصة لأن ينتمي إلى العينة .

نفترض أنه لدينا عينة مكونة من n من المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n ، و \bar{x} مأخوذة من مجتمع ما . وليكن الوسط الحسابي لهذه العينة هو $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n = (\sum x)/n$. نفترض أننا أخذنا عينات أخرى من نفس المجتمع . وحسبنا الوسط الحسابي لكل من هذه العينات ، بهذه الطريقة يكون \bar{x} هو الوسط الحسابي للعينة الثانية ، و \bar{x} هو الوسط الحسابي للعينة الثالثة وهكذا . نرى أن الوسط الحسابي للعينة له توزيع يشار إليه بتوزيع المعاينة للوسط .

نفرض أن الوسط الحسابي للمجتمع هو μ وتباينه σ^2 وأن عينة عشوائية x_1, x_2, \dots, x_n أخذت من هذا المجتمع فكما اخترنا العينة عشوائياً ، فإن القيم التي عددها n يمكن اعتبارها متغيرات عشوائية مستقلة بحيث أن وسطها μ وتباينها σ^2 لذلك .

$$\bar{x} = \frac{\text{وسط } (x_1) + \text{وسط } (x_2) + \dots + \text{وسط } (x_n)}{n}$$

$$= \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\bar{x} = \frac{\text{تباين } (x_1) + \text{تباين } (x_2) + \dots + \text{تباين } (x_n)}{n}$$

و

وبما أن كل القيم x مستقلة عن بعضها . فإن

$$(\bar{x}) = \frac{(\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

هذه النتائج فى الحقيقة هى أمتداد للنتائج فى البند ١٤ - ٦ الخاص بتجميعات التوزيعات الطبيعية .

ولذا فالتا نستنتج أن توزيع المعاينة للوسط الحسابى لمينة من n من المشاهدات مأخوذة من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2 لها الوسط μ وتباينه σ^2/n ، والانحراف المعياري لأوساط المينة ، σ/\sqrt{n} ، غالبا ما يسمى الخطأ المعياري للوسط . إذا كان متجمعا بالإضافة الى أن له μ و σ^2 كوسط وتباين ، له التوزيع الطبيعي ، فان توزيع المعاينة للوسط هو أيضا طبيعى (بوسط μ وتباين σ^2/n) . من هذه النتائج نرى أنه كلما كانت n كبيرة ، كان تباين وسط المينة صغيرا ، ولذلك فان أقرب قيمة الى μ تتوقعها هى \bar{x} . وشكل ١٥ - ٥ يوضح هذه النقطة .

مثال ١٥ - ١ وحدات مصنعة لوزن متوسط 3 lbs وانحراف معياري 0.05 lbs . حلب كرتون كل منها يحتوى تسع وحدات تباع على أن الوزن المتوسط للوحدات فى الكرتونة لا يقل عن 2.97 lbs . والعلب الكرتون التى لا تحقق ذلك ترفض .

المطلوب :

- (١) حساب نسبة العلب التى ترفض .
- (٢) نفرض الآن أن النسبة المرفوضة يمكن تغييرها بإدخال التحسين بحيث أن الوزن المتوسط لكل الوحدات يزيد الى 3.01 lbs . وهذا التعديل يكلف £0.36 لكل حبة كرتون كاملة . إذا كانت تكاليف كرتونة مرفوضة هو £10 أحسب ما إذا كان التعديل مرغوبا فيه اقتصاديا .

(ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٨)

الاجابة :

- (١) من المناسب أن نفرض أن وزن الوحدات له تقريبا التوزيع الطبيعي ، ولذلك نستطيع أن نفرض مطمئنين أن الوزن المتوسط لتسع وحدات فى الكرتونة له التوزيع الطبيعي بوسط $\mu = 3$ lbs وانحراف معياري .

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.05}{\sqrt{9}} = 0.0167 \text{ lb}$$

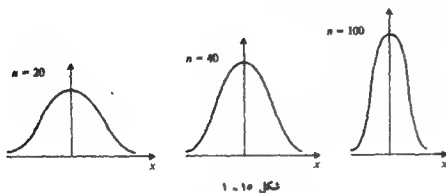
كما أن

$$\frac{3 - 2.97}{0.0167} = 1.80$$

ومن جداول التوزيع الطبيعي فى ملحق الكتاب رقم 2 نرى أن 3.59% من الكرتونات مرفوضة .

- (٢) إذا تغيرت μ الى 3.01 lbs فان

$$\frac{3.01 - 2.97}{0.0167} = 2.40$$



النسبة المئوية الجديدة للرفض هي 0.82% . وبالتالي هناك استنتاج أن 2.77% من الكروتونات مرفوضة . حيث أن تكاليف الكروتونة المرفوضة هو £10 فإن القيمة المتوقعة للتغير عن كل كروتونة هي فقط 27.7 بنس مقارنة بـ 36 بنس للتعديل لهذا فإن التعديل غير مرغوب فيه اقتصادياً .

ذكرنا في الفصل السابق أنه إذا أخذنا عينات عشوائية كبيرة لمتغير له أي توزيع فإن متوسطات العينة لها تقريبا التوزيع الطبيعي ، الآن نصيغ هذا التقرير كنظرية الحد المركزي .

نظرية الحد المركزي

إذا أخذت عينات متعددة لها الحجم n من مجتمع له الوسط μ وتباين σ^2 فإنه إذا كانت n كبيرة ، يكون توزيع متوسط العينة \bar{x} تقريبا هو التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2/n وهذا التقريب يكون أفضل كلما زادت n .

ماذا نقصد بكبير n في هذه النظرية ؟ الاجابة على ذلك ليست سهلة ، كما أنها تعتمد على قرب المجتمع من التوزيع الطبيعي وعادة تكون n أكبر من 30 شرط كاف .

لاحظ أنه لا يوجد دلالة على توزيع قيم المجتمع تحت الدراسة في نظرية الحد المركزي أنها تؤكد أن التوزيع الطبيعي هو أكثر توزيع احتمالي هام . كثيرا من التكنيكات الاحصائية تشير إلى استخدام التوزيع الطبيعي خاصة خلال نظرية الحد المركزي .

مثال ١٥ - ١ : أعمار نوع خاص من بطاريات العربات معروف أنها من توزيع بوسط 30 شهرا ، وانحراف معياري 9 شهور . احسب توزيع المعالجة لعينة عشوائية مكونة من 36 من مثل هذه البطاريات . استنتج أيضا أن احتمال متوسط هذه العينة لـ 36 بطارية عربة يكون أكبر من 32 شهرا .

الاجابة : في هذا المثال لا تعلم توزيع أعمار البطاريات تحت الدراسة . ومع ذلك فهي مسألة بسيطة جدا بسبب نظرية الحد المركزي . في الحقيقة أن توزيع الأعمار هو تقريبا التوزيع الطبيعي ، لهذا ، فإن $n = 36$ هي بالتأكيد كبيرة كثيرا كافيًا لأن نقول أن \bar{x} له التوزيع الطبيعي بوسط يساوي 30 ونحط معياري يساوي 1.5 ($= 9/\sqrt{36}$) . كما أن $1.33 = 1.5 / (30 - 32)$ نرى من جداول التوزيع الطبيعي المعياري أن ، الاحتمال المطلوب هو 0.09 .

توزيع المعاينة للنسب : في النواحي المالية ، فإنه من الضروري غالباً اختبار بيانات وصفية فمثلاً لحساب نسبة القوائم أعلى من £25 أو لإيجاد تكلفة الطلبات المخاطة . نفرض أن لدينا مجتمعاً يحتوى على نسبة p من الوحدات التى لها صفة ذات أهمية (مثلاً معينة) . إذا أخذت عينات عديدة ذات حجم n ولكل عينة نحسب نسبة العينة \hat{p} للمعيب فيها ، فإنه بطريقة مماثلة للطريقة التى استخدمت فى متوسطات العينة يجب أن نستخدم نظرية الحد المركزى للحصول على التقرير التالى

عندما تكون n كبيرة p ليست قريبة من صفر ، أو واحد ، فإن p لها تقريبا التوزيع الطبيعي بوسط p وتباين $p(1 - p) / n$.

ومرة أخرى فإن القيود على n و p ليست نوعية جداً . قاعدة الإبهام هى أن كلا من np و $n(1 - p)$ أكبر من 5 كما وصف فى البند ١٤ - ٧ .

مثال ١٥ - ١ - ٣ : عندما أعطى علاج لمرضى يتألمون من مرض كانت احتمال نسبة الشفاء هى 0.8 فإذا أعطى العلاج لعينة عشوائية من 64 من المرضى يقاسون من المرض ،
١ - فما هو الوسط والانحراف المعيارى لنسبة الشفاء للمرضى ؟
٢ - ما هو احتمال أن أقل من 50 مريضاً تم شفاؤهم ؟

الإجابة :

١ - فى هذا المثال نعرف أن $p = 0.8$ وأن $n = 64$ لذلك فإن نسبة العينة لها الوسط $p = 0.8$ ، وانحراف معيارى

$$\sqrt{p(1 - p)/n} = \sqrt{(0.8 \times 0.2)/64} = 0.05$$

٢ - هذا الجزء من السؤال هو ببساطة تطبيق لتقريب التوزيع الطبيعي الى توزيع ذات الحدين ، كما وصف فى البند ١٤ - ٧ . وبما أن

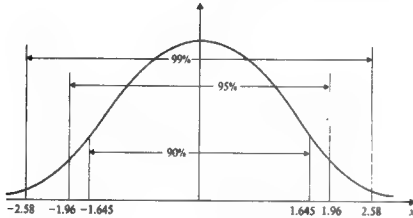
$$\frac{49.5 - (64 \times 0.8)}{\sqrt{(64 \times 0.8 \times 0.2)}} = \frac{-1.7}{3.2} = -0.53$$

فإننا نحتاج إلى المساحة تحت المنحنى الطبيعي أكثر من 0.53 انحرافات معيارية تحت الوسط . المساحة هى 0.298 .

قبل أن نتمنى كثيراً فى التقدير نعتبر باختصار المنحنى الطبيعي المعيارى ، كما هو مجدول فى ملحق الكتاب رقم ٧ . بملاحظة هذه الجداول نستطيع أن نرى أن 95% تماماً من المساحة تحت المنحنى الطبيعي تقع ضمن 1.96 انحرافات معيارية للوسط . بطريقة مماثلة نستطيع أن نرى أن 90% من المساحة تقع ضمن 1.645 انحرافات معيارية، 99% تقع ضمن 2.88 انحرافات معيارية . للوسط . هذه النتائج موضحة فى شكل ١٥ - ٢ القيم (1.645 و 1.96) ستظهر بوضوح فى الفصول القادمة ويجب العلم بها الآن . لأنها ستوفر كثيراً من الجهد فيما بعد .

تعيين ١٥-١-١ : وزن نبات من القمح في حزمة معيارية له التوزيع الطبيعي بوسط 502 g وانحراف معيارى 3.75 g اختيرت عينات عشوائية من 16 حزمة .

- ١- احسب الوسط والانحراف المعياري لمتوسط الوزن للقمح في كل حزمة في عينة عشوائية من 16 حزمة .
- ٢- أوجد تقدير إحتمال أن عينة ستعجب في المتوسط أقل من 500 g .



شكل ١٥-٢

١٥-٢ تقدير بارامترات المجتمع

عندما نستخدم البيانات من عينة لتدلنا على شيء ما عن المجتمع المأخوذ منه العينة فإن الشيء الوحيد الذى نكون متأكدين منه هو أنه ليس لدينا كل الحقائق عن المجتمع . ولهذا فانه من الضروري أن نتقدم بطريقة عملية حتى يمكننا الحصول على درجة أعلى من الثقة فى أن الحقيقة تقع ضمن حدود معينة . فى هذا الجزء نريد أن نحاول أن نقرر القيم المدعية للبارامترات للمجتمع تحت الدراسة ، على أساس بيانات العينة المسيرة لنا .

تقدير النقطة : تقدير نقطة هو عدد نحصل عليه من حسابات على بيانات العينة المشاهدة وهو يستخدم كتقريب لبارامتر المجتمع تحت الدراسة . هناك عدد من الخواص المرغوب فى أن تتصف بها تقديرات النقطة ، التى تجعل تقدير أحد الأشخاص أفضل من أى من الآخرين . التقديرات العادية هى :

- ١- إذا كان الوسط μ للمجتمع غير معلوم ، فإن وسط العينة ، $\bar{x} = (\sum x) / n$ هو تقدير مناسب ، أى أن $\hat{\mu} = \bar{x}$.
- ٢- إذا كانت نسبة المجتمع p غير معلومة ، فإن نسبة العينة \hat{p} هى أكثر تقدير مناسب .
- ٣- إذا كان تباين المجتمع σ^2 غير معلوم ، فإن أكثر تقدير مناسب هو $\hat{\sigma}^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$. هذه نتيجة قد تبدو غريبة للفقراء ، بينما القيمة الأكثر وضوحا $\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n$ تزدى دائما الى بنفس تباين المجتمع σ^2 ولهذا فهى قيمة متحيزة . هذا ليس الحال مع $\hat{\sigma}^2$ بنفس الطريقة . هو أكثر تقدير مناسب للانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم الانحراف المعياري σ . لاحظ أنه عندما تكون n حجم العينة ، كبيرة يكون هناك فرق قليل بين القيم المحسوبة لـ $\hat{\sigma}^2$ ، عموما ، التعبير «انحراف العينة المعياري» يستخدم للدلالة على $\hat{\sigma}$.

مثال ١٥ - ٢ - ١ : عينة من 20 فاتورة اختيرت من مجتمع كبير .

12.53	22.27	13.38	51.47	8.05	24.11	43.48	15.27	50.97	8.06
11.47	58.00	43.16	19.05	22.20	62.93	32.04	26.78	38.07	45.11

أوجد تقديرات النقطة لما يأتي :

- ١ - متوسط المجتمع ،
- ٢ - نسبة المجتمع لقيمة الفواتير أكثر من £50 ،
- ٣ - الانحراف المعياري للمجتمع .

الاجابة: من البيانات نجد أن $\Sigma x = 608.40$ وأن $\Sigma x^2 = 24082.884$.

١ - تقديرونا لمتوسط المجتمع هو

$$\bar{\mu} = \frac{608.40}{20} = £30.42$$

٢ - حيث يوجد 4 قيم من بين قيم العينة الـ 20 أكبر من £50 فإن تقدير النقطة لنسبة المجتمع هو $p = 4/20 = 0.2$.

٣ - تقديرونا للانحراف المعياري للمجتمع هو

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{(\Sigma x^2 - n\bar{x}^2)}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{19} (24\,082.884 - 30.42 \times 608.40)} \\ &= £17.13 \end{aligned}$$

فترة التقدير : فترة التقدير هي فترة تتحدد بقيمتين نحصل عليها من حسابات على قيم العينة المشاهدة ، ويتوقع أن تحتوي على القيمة الحقيقية للبارامتر غير المعلوم في داخلها اعتبر المثال التالي .

مثال ١٥ - ٢ - ٢ : أراد كاتب حسابات أن يفحص مواعيد استحقاق الديون للدفع . فوجد من التجربة أن مواعيد الدفع لها التوزيع الطبيعي التفرقي بانحراف معياري 10 أيام وإذا كانت مواعيد الدفع طويلة ، فإن الشركة تكون مهددة في السولة النقدية ، وبالتالي من المهم أن يوجد تقدير دقيق لمتوسط مواعيد الدفع . لمعمل ذلك أخذ المحاسب عينة من 25 فاتورة من السنة الماضية في المعاملة ، أوجد الوسط $\bar{x} = 44$ يوما ، كيف يكون \bar{x} دقيقا كنقطة تقدير لمتوسط المجتمع μ ؟

الاجابة : نعلم أن احتمال ان متغير له التوزيع الطبيعي سيأخذ قيمة ضمن 1.96 انحرافات معيارية للوسط هو 0.95 ، ولأننا نعرف أن \bar{x} له التوزيع الطبيعي بوسط μ ، وانحراف معياري σ/\sqrt{n} . يتبع أن

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +1.96\right) = 0.95$$

ولهذا

$$P\left(-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < +1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

وفي المثال 10 و $\sigma = 25$ و $n = 25$ وبالتالي $\sigma/\sqrt{n} = 5$ وعليه فإن

$$P(-3.92 < \bar{x} - \mu < +3.92) = 0.95$$

كاتب الحسابات يشعر بثقة تامة أن متوسط العينة $\bar{x} = 44$ يختلف عن قيمة المجتمع μ بأقل من 3.92 يوما . قيمة الفرق تسمى بخطأ التقدير ، ويمكن التعبير عنه فقط بدلالة الاحتمال حيث أن μ غير معلومة .

ماهى 95% فترة الثقة لـ μ على أساس أن العينة الابتدائية مكونة من 25 ؟ نرى أن

$$P(\mu - 3.92 < \bar{x} < \mu + 3.92) = 0.95$$

أو

$$P(\bar{x} - 3.92 < \mu < \bar{x} + 3.92) = 0.95$$

نطلق على الفترة $(\bar{x} - 3.92, \bar{x} + 3.92)$ أو $(40.08, 47.92)$ أنها 95% فترة ثقة لـ μ والنقط النهائية للفترة تسمى حدود الثقة لـ μ .

كحالة عامة يتيج أنه اذا كان المجتمع له التوزيع الطبيعي التقريبي فإن.

$$P\left(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

ولهذا ، فإن 95% فترة الثقة العامة تأخذ الصورة

$$\left(\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

هذا التقرير يخبرنا بأنه على المدى الطويل من أخذ عينات عشوائية مكونة ذات حجم n من مجتمع ما فإن 95% من زمن فترة الثقة تشتمل على μ .

في هذا الجزء نتعامل فقط بالمجموعات ذات التوزيع الطبيعي . على أن ، نظرية الحد المركزى تجعل هذا القيد غير ضرورى عندما يكون حجم العينة كبيرا .

مثال ١٥-٢-٣ : المتوسط المطلوب للزمن بالأيام لتسليم الطلبات بشركة كهرباء يحتاج الى تقدير . اخبرت عنه من 60 من الطلبات عشوائيا من معاملة تجارية حديثة . متوسط العينة هو 5.9 يوم . σ ، تقدير العينة لانترواف المعيارى للمجتمع ، هو 1.7 يوم . احسب 95% فترة ثقة لتقدير أزمته التسليم .

الاجابة: 95% فترة ثقة لـ μ تأخذ الصورة

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{الى} \quad \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

كما سبق أن رأينا . على أن ، الانحراف المعياري للمجتمع ، σ ، غير معلوم . لحسن الحظ ، عندما تكون n كبيرة ، لا نعرض لخطأ كبير باستخدام تقدير غير متحاز ، $\hat{\sigma}$ كبديل . لهذا نستخدم

$$\bar{x} + 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \text{إلى} \quad \bar{x} - 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

سنرى في البند ١٥ - ٣ أننا لا نستطيع استخدام هذا التقريب عندما تكون n صغيرة (أقل من 30) . في المثال السابق تكون فترة الثقة

$$5.9 + 1.96 \times \frac{1.7}{\sqrt{60}} \quad \text{إلى} \quad 5.9 - 1.96 \times \frac{1.7}{\sqrt{60}}$$

$$6.33 \quad \text{إلى} \quad 5.47$$

أي أن

يجب ملاحظة أن 95% فترة ثقة غير مناسب للموقف في هذا السؤال ، فمثلا 99% فترة ثقة (على الصورة $(\bar{x} \pm 2.58 \sigma/\sqrt{n})$) أو 90% فترة ثقة (على الصورة $(\bar{x} \pm 1.645 \sigma/\sqrt{n})$) من الممكن تفصيلها . نرى أن الفترة تتسع كلما نزيد من مستوى الثقة . وعلى العكس نستطيع أن نصغر فترة الثقة بتغيير درجة الثقة .

مثال ١٥ - ٢ - ٤ : في أثناء مراجعة الحسابات شوهدت عينة عشوائية من 50 فاتورة من مجتمع كبير . حسب قيمة متوسط العينة فوجدت £52.40 والانحراف المعياري £5.60 .

قدر الخطأ المعياري للمتوسط ، واحسب 90% فترة ثقة للمتوسط الحقيقي للمجتمع .

الاجابة يقدر الخطأ المعياري للمتوسط بالقيمة $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$. لم تكن لدينا قيمة σ ولكن لدينا القيمة s . على ذلك .

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{5.60}{7} = 0.80$$

فان هذا المقياس يمكن استخدامه الآن في ايجاد تقدير لفترة متوسط المجتمع . يمكن حساب 90% فترة ثقة كما يأتي :

$$52.40 + (1.645 \times 0.80) \quad \text{إلى} \quad 52.40 - (1.645 \times 0.80)$$

$$53.72 \quad \text{إلى} \quad 51.08$$

أي أن

نفرض أننا لم نتحقق من دقة هذا التقدير . كيف يمكننا أن نتأكد بصورة معقولة من أنه باستخدام عينة اضافية كبيرة ، باحتمال 0.90 مثلا ، أن التقدير لا يكون خاطئا بأكثر من 1 £ ؟

كلما زاد حجم العينة ، فإن الخطأ المعياري يقل . حيث أن 90% من المساحة المركزية لمنحنى التوزيع الطبيعي تقابل 1.645 انحرافات معيارية على جانبي μ وعليه فان n يجب أن تحقق المعادلة

$$1.645 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 1$$

أي أن

$$n = (1.645 \hat{\sigma})^2 = (1.645 \times 0.80 \times \sqrt{50})^2 \\ = 86.6$$

أي أن المطلوب عينة إضافية من 37 .

بطريقة مماثلة لمتوسط المجتمع غالباً مانريد حساب تقدير فترة لنسبة المجتمع ، p . باستخدام النتيجة في البند ١٥-١ من أن نسبة العينة \hat{p} لها التوزيع الطبيعي بوسط p وانحراف معياري $\sqrt{p(1-p)/n}$. بشرط أن n كبيرة كبراً مناسباً ، وأن p لا تقترب من الصفر ، أو الواحد ، فالتوقع أن تكون 95% فترة الثقة تكون

$$\hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{إلى} \quad \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

لسوء الحظ ، هذه الفترة تعتمد على p أيضاً ، وهي بالطبع غير معلومة . ومع ذلك فإننا نستخدم 95% فترة ثقة تقريبية لـ p تكون

$$\hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \text{إلى} \quad \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

مثال ١٥-٢-٥ : أخذت عينة عشوائية من 200 من مجتمع كبير من الحسابات من هذه العينة وجد أن 18 بهم بعض الشلوث . أوجد 95% فترة ثقة للنسبة الحقيقية للأخطاء بين هذه الحسابات .

الاجابة: نسبة العينة $\hat{p} = 18/200 = 0.09$. لهذا فإن الخطأ المعياري للنسبة يقدر بالآتي :

$$\sqrt{\frac{0.09 \times 0.91}{200}} = 0.0202$$

95% فترة ثقة لـ p هي

$$0.09 + (1.96 \times 0.0202) \quad \text{إلى} \quad 0.09 - (1.96 \times 0.0202)$$

$$0.130 \quad \text{إلى} \quad 0.050$$

أي أن من

نقح باحتمال 95% أن النسبة الحقيقية للحسابات الخطأ تقع بين 0.05 و 0.13 .

تمرين ١٥-٢-١ : من عينة عشوائية مكونة من 400 محاسب ماهر ، متوسط الراتب السنوي كان £12 000 والانحراف المعياري £3000 . أحسب الخطأ المعياري للمتوسط ، أوجد 99% فترة ثقة لمتوسط الراتب لكل محاسب ماهر .

تعمرين ١٥-٢-٧ : في عينة عشوائية من 250 شخص لجأوا إلى سلفة مالية من شركة ، 40 رفضوا . أوجد 95% فترة ثقة للنسبة الصحيحة لهؤلاء الذين لم يتسلموا السلفة .

١٥-٣ تقدير العينة الصغيرة

اعتدنا سابقا ، بمعلومية حجم عينة n أن النتيجة $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ لها التوزيع الطبيعي المعياري للحصول على حدود الثقة لمتوسط المجتمع ، كما رأينا سابقا . غالبا ما تكون غير معلومة ونحتاج إلى تقديرها بتقدير غير متحيز ، هذا يعطى نتائج جيدة في حالة العينات الكبيرة ، ولكن فترات الثقة تكون ضيقة للغاية عندما تكون n صغيرة ولتجنب الخطأ الناتج عن ابدال σ بـ s عندما يكون لدينا حجم صغير للعينة ، نقدم توزيع جديد يسمى بتوزيع ستوفنت أو توزيع t . بحث جوست W.S.Gosset (احصائي يكتب تحت اسم "Student") مشكلة تحديد التوزيع المضبوط للمتغير

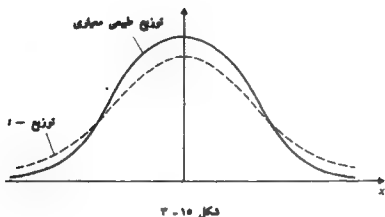
$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

في عينات من التوزيع الطبيعي . توزيع t (كما هو مجدول في الملحق الثاني للكتاب) يكون صحيحا عندما يكون المجتمع تحت الدراسة له التوزيع الطبيعي وبخلاف ذلك يكون مقربا للتوزيع الطبيعي ، وأكثر من ذلك ، فإن توزيع t يشبه التوزيع الطبيعي المعياري ، أي يماثله ، ولكنه انتشارا ، كما هو موضح في شكل ١٥-٣ .

المجدول يعطى قيما لتوزيع t المناظرة لما يسمى « درجات الحرية » ويرمز لها بالرمز v ، واحتمالات مختلفة . في هذه الحالة $v = n - 1$ أي أقل من حجم العينة بواحد ، تقابل استخدام المقسوم عليه $n - 1$ بدلا من n في إيجاد الانحراف المعياري . نعرف أنه في حالة التوزيع الطبيعي المعياري ، فإن 95% من المجتمع يقع بين ± 1.96 . النقاط المناظرة في حالة توزيع t هي

قيمة t	v
3.18	3
2.23	10
2.04	30
1.96	∞

يمتثل توزيع t مع التوزيع الطبيعي المعياري لعدد لا نهائي من درجات الحرية . إذا كانت n أكبر من 30 فمن الأفضل استخدام التوزيع الطبيعي المعياري . سنوضح استخدامه بالمثالين الآتيين :



مثال ١٥ - ٣ - ١ : أنت تريد أن نفرض ضرائب على القيمة الكلية للوحدات المباعة ، والتي عددها 900 في دفتر الحسابات الجارية . ونتيجة لضيق الوقت المتاح لاستطيع فحص كل وحدة في الدفتر ولكن تأخذ عينة عشوائية من 2% من الوحدات . القيم التي اختيرت وعددها 18 هي

£	£	£	£	£	£
45	58	49	70	38	80
38	15	50	40	45	75
35	43	100	44	41	34

المطلوب :

- ١ - تقدر الوسط والانحراف المعياري للمجتمع .
- ٢ - تعطى نقطة تقدير لعدد الوحدات الكلى 900 .
- ٣ - توجد 95% فترة ثقة للقيمة الكلية للأعداد 900 .

الاجابة :

١ - التقديرات غير المتميزة لـ μ و σ هي

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{900}{18} = £50$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{1}{17}(51800 - 45000)} = £20$$

٢ - نقطة التقدير للقيمة الكلية يساوى $£4500 = 900 \times 50$

٣ - 95% فترة ثقة لـ μ تأخذ الصورة

$$\bar{x} \pm t \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

حيث μ هي قيمة توزيع $\mu = 17 - 18$. من الملحق الثاني للكتاب نجد أن قيمة μ المطلوبة 2.11 . ولهذا فإن 95% فترة ثقة لـ μ هي

$$50 - \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}} \text{ إلى } 50 + \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}}$$

أو من £40.05 إلى £59.95

نستطيع الآن الحصول على 95% فترة ثقة للقيمة الكلية للمجتمع بضرب كل حد في عدد القيم في المجتمع 900 هنا $£36\ 045 = 40.05 \times 900$ و $£53\ 955 = 59.95 \times 900$. ولهذا تكون حدود الثقة للقيمة الكلية هي £36 045 و £53 955 .

مثال ١٥ - ٣ - ٧ : من هيئة عشوائية من 9 مكونات لألة ، يتوقع أن متوسط العمر هو 15 شهرا بانحراف معياري 2 شهر . على أساس هذه العينة احسب الحدود التي يتغير بينها متوسط العمر الحقيقي عند 95% و 99% حدود ثقة . (م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٤)

الاجابة: الخطأ المعياري للمتوسط يساوي $\sigma/\sqrt{n} = 2/\sqrt{9} = 0.7071$. لايجاد قيم μ الصحيحة نلاحظ أن $u = 9 - 1 = 8$ ، 95% فترة ثقة لمتوسط العمر الحقيقي هي

$$15 - 2.31 \times 0.7071 \text{ إلى } 15 + 2.31 \times 0.7071$$

أو من 13.4 إلى 16.6 شهر
99% فترة ثقة المماثلة هي

$$15 - 3.36 \times 0.7071 \text{ إلى } 15 + 3.36 \times 0.7071$$

أو من 12.6 إلى 17.4 شهر

تمرين ١٥ - ٣ - ١ : عينة ذات حجم 16 من مجتمع له التوزيع الطبيعي نتج قيم العينة $\bar{x} = 14.5$ ، $s = 5$. أوجد 95% حدود ثقة لمتوسط المجتمع μ .

تعاريف

١٥ - ١ مصنع به عشر ماكينات حفر متماثلة مرقمة من 7601 إلى 7610 . ملخص تسجيلات قسم الصيانة لعام 1976 يظهر في جدول أيام أعطال الآلات كما يلي :

رقم الماكينات	لهم التصليل
7601	15
7602	16
7603	18
7604	13
7605	21
7606	14
7607	15
7608	17
7609	23
7610	18

المطلوب ذكر المدد المتوسط المتوقع لأيام الإعطال عام 1977 . ضع 95% حدود ثقة على هذا المتوسط .
(م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٧)

١٥ - ٢ تكتشف المهارة يدوية للمجندين لاحدى المؤسسات بواسطة اختبار معيارى . النتائج المنسجلة تتبع التوزيع الطيىمى أو توزيع جاوس بانحراف معيارى 10 وحدات ، ولكن الوسط يعتمد على المجتمع المسحوب منه المجندون .

(١) ماهو توزيع الوسط لمينة عشوائية اختيرت مكونة من 16 مجندا من مجتمع معين ؟
(٢) نفرض أن التسجيلات فى (١) كانت ، 102، 88، 116، 104، 98، 101، 110، 82، 112، 96، 101، 78، 114، 93، 97، و 108. ماهو نوع التقرير الذى يمكن أن يعمل عن الوسط غير المعلوم للمجتمع المسحوب منه العينة ؟ أعط مثلا لتقرير من هذا النوع ، والذى يستخدم لشخص مطلوب للمجنيد .

(م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

١٥ - ٣ فى عينة عشوائية من 400 منزل ، 160 لديهم نظام حرارى مركزى . قدر نسبة المجتمع عند 95% مستوى ثقة .

١٥ - ٤ يعطى اختبار صلاحية لجهد المجندين لشركة ما . وتسجيلاتهم تتبع التوزيع الطيىمى بوسط 50 والانحراف المعياري 10 .

(أ) ماهو احتمال أن مجندا اختيرا عشوائيا سوف يسجل :

(١) أكثر من 65 .

(٢) بين 45 و ٥5 ؟

(ب) ماهو احتمال أن التسجيل المتوسط لمينة عشوائية من 25 مجندا يكون اقل من ٤5 ؟

(ج) ماهو احتمال أن التسجيلات المتوسطة لميتين عشوائيتين ذات حجم 25 تختلف بأكثر من ٥ ؟

(د) أوجد 90% حدود ثقة لتسجيل متوسط لمينة اختيرت عشوائيا مكونة من 100 مجند .

(م أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٦)

الفصل السادس عشر

الاختبار الاحصائي للفروض

١٦ - ١ المفاهيم الأساسية

في الفصل السابق تناولنا أحد أوجه الاحصاء الاستدلالي ، وهو تقدير المعلومات المجهولة لمجتمع من بيانات العينة . وفي هذا الفصل سنتناول موضوعا مرتبطا بذلك وهو تحديد ما إذا كانت بيانات العينة تؤيد اعتقادا مينا عن المجتمع .

وعندما نستخدم بيانات العينة لاختبار فرض معين ، فإننا نعلم أن الملاحظات قد لا تنطبق بالضبط على الفرض حتى لو كان صحيحا . ولذلك فمن الضروري أن نلاحظ قرب البيانات من الفرض لنقرر ما إذا كان الاختلاف بينهما ناجما عن الصدفة فقط أم عن عدم صحة الفرض . وكما كان الأمر في الفصل السابق ، فإننا لن نعلم الحقيقة أبدا ، وكل ما نستطيعه هو أن نتخذ القرار على أساس علمي حتى تكون لدينا فرصة معقولة في الوصول إلى نتائج صحيحة .

ولتوضيح فكرة الاختبار الاحصائي للفروض سنتناول المثال التالي :

مثال ١٦ - ١ : يقوم منتج كابلات متوسط مقاومتها للكسر 2000 lb وانحرافها المعياري 100 lb واستعمال طريقة جديدة للانتاج يزعم المنتج أنه يمكن زيادة مقاومة الكسر . وللتحقق من هذا الزعم تم انتاج 50 كابلا بالطريقة الجديدة ، واختيرت فأعطت متوسط مقاومة الكسر 2050 lb .

هل يمكن القول بصحة زعم المنتج بمستوى المعنوية 0.01 ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٧ رقم ٤)

نفرض فرضا هو أن $\mu = 2000$ lb في مقابل الفرض أن $\mu < 2000$ lb . ونسمى الفرض الأول بالفرض الصفري H_0 . ونسمى الفرض البديل H_1 وفي مثالنا هذا ، فإن

$$H_0 : \mu = 2000, \quad H_1 : \mu > 2000$$

والمطلوب احتمال صغير لرفض H_0 (وبالتالي قبول H_1) إذا كان H_0 صحيحا ويسمى احتمال حدوث ذلك مستوى معنوية اختبار الفرض . وفي المثال نأخذ مستوى للمعنوية مقداره $\alpha = 0.01$. ولو أخذنا بيانات المثال وقمنا بحساب وسط العينة نجد أنه أعلى من 2000 lb بكثير بحيث لا تزيد فرصة حدوثه على 1% إذا كان الوسط الجديد μ مازال 2000 lb ، ولذلك يحق لنا أن نرفض الفرض H_0 والواقع أن قيمة كهذه لوسط العينة تعتبر أعلى معنويا بكثير من 2000 lb وتستعمل كلمة « معنويا » هنا بمفهوم احصائي محدد وهو « غير محتمل حدوثها بمجرد الصدفة » . وتكون قيم وسط العينة المرتفعة عن 2000 lb بدرجة كافية لرفض الفرض H_0 مجموعة من القيم تسمى بالمنطقة « العرجة » في الاختبار .

وقد رأينا بالفعل الخامس عشر أن أوساط العينات لها توزيع طبيعي وسطه هو نفس وسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ/\sqrt{n} . وفي المثال تكون \bar{x} موزعة توزيعاً طبيعياً وسطه μ وانحرافه المعياري $14.142 \text{ lb} = 100/\sqrt{50}$. وبالتالي يمكن تحديد المنطقة الحرجة كما يلي :

$$P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 2.33\right) = 0.01 \quad (\text{انظر جداول التوزيع الطبيعي})$$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{14.142} \geq 2.33\right) = P(\bar{x} - \mu \geq 32.95)$$

إذا افترضنا أن H_0 فرض صحيح ، فإن $\mu = 2000$ وبالتالي :

$$P(\bar{x} - 2000 \geq 32.95) = 0.01$$

$$= P(\bar{x} \geq 2032.95)$$

وهكذا فلو كان H_0 صحيحاً ، فإن هناك احتمالاً قدره 1% بالضغط أن يجرى وسط العينة أكبر من 2032.95 lb وبالتالي فإن المنطقة الحرجة للاختبار هي المنطقة

$$\bar{x} \geq 2032.95 \text{ lb}$$

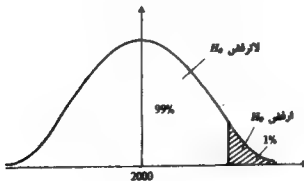
إذا وقعت \bar{x} داخل هذه المنطقة ، فإننا نرفض H_0 (انظر الشكل ١٦ - ١). ولما كان الوسط الفعلي للعينة هو 2050 lb فإننا نرفض الفرض الصغرى ونستنتج أن العينة تعطينا دليلاً كافياً على صحة زعم المنتج أن مقاومة الكسر قد زادت .

وستترك الآن هذا المثال ، ونبحث البنية العامة لاختبارات الفروض . وستجرى جميع الاختبارات الواردة في هذا الفصل طبقاً للطريقة التالية التي تتكون من ست خطوات .

الخطوة الأولى: تحديد الفرض الصغرى ، والفرض البديل للاختبار . والفرض الصغرى H_0 هو الفرض الجاري اختياره ، وعلى سبيل المثال $H_0: \mu = 2000 \text{ lb}$ ومع اختيار اتفاق معلومات العينة مع الفرض H_0 يحدد فرض بديل هو H_1 ، وعلى سبيل المثال $H_1: \mu < \mu_0 = 2000 \text{ lb}$. ونلاحظ أن الطريقة يمكن أن تؤدي إلى رفض H_0 ولكنها لا يمكن أن تؤدي إلى اعترافنا رسمياً بصحة الفرض الصغرى .

الخطوة الثانية: اختيار المستوى المعنوي المناسب للاختبار .

والمستوى المعنوي للاختبار α ، هو احتمال أن نرفض الفرض H_0 في حين أنه صحيح . ويجب أن



شكل ١٦ - ١

نقرر مدى صغر هذا الاحتمال قبل اتخاذ قرارنا بشأن الفرض . وفي العادة يؤخذ مستوى المعنوية مساويا لـ :
 $0.001, 0.01, 0.05$. وفي المثال السابق أخذنا $\alpha = 0.01$

الخطوة الثالثة: اختيار مقياس احصائي مناسب للاختبار .

ويعصب من بيانات العينة مقياس احصائي مناسب يستخدم لاختبار الفرض الصفرى وعلى سبيل المثال وسط العينة \bar{x} أو مقياس عيارى مكافئ مثل $(\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$. علامة يختار المقياس الاحصائي للاختبار بحيث أنه اذا زادت (أو نقصت) قيمته ، فإن الفرض الاحصائي يصبح أقل احتمالا . أى أنه يجب أن تكون هناك علاقة مباشرة بين قيمة المقياس الاحصائي للاختبار ، وبين صحة الفرض الصفرى .

الخطوة الرابعة: تحديد المنطقة الحرجة

الآن يجب أن نحدد قيمة المقياس الاحصائي للاختبار بحيث يرفض الفرض الصفرى اذا ساوى احتمال الرفض الخطأ مستوى المعنوية المطلوب . وفي المثال السابق كانت المنطقة الحرجة

$$\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 2.33 \right) \text{ أو بمعنى آخر } \bar{x} \geq 2032.95$$

الخطوة الخامسة : حساب المقياس الاحصائي من بيانات العينة .
 وعلى سبيل المثال

$$\left(\because \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2050 - 2000}{14.142} = 3.54 \right) \text{ أو بمعنى آخر } \bar{x} = 2050 \text{ lb}$$

الخطوة السادسة: تقدير رفض أو قبول الفرض H_0

إذا كان المقياس الاحصائي المحسوب يقع فى المنطقة الحرجة يرفض الفرض H_0 . أما اذا كان يقع خارج تلك المنطقة ، فإننا نستنتج أن بيانات العينة لاتدل دلالة كافية على رفض الفرض H_0 .

البدائل بطرف واحد أو طرفين : فى المثال ١٦ - ١ - ١ استغلنا فرضا من النوع

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

حيث $\mu_0 = 2000 \text{ lb}$. وفى كثير من الحالات يكون الفرض المناسب هو

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

ويعنى آخر ، فإننا نرفض الفرض H_0 اذا كان الوسط المجهول للمجتمع أكبر أو أصغر معنويا من μ_0 . ويسمى الفرض من هذا النوع بديلا بطرفين . وفى هذه الحالة يجب تقسيم احتمال المعنوية بين الطرفين ، كما هو مبين بشكل (١٦ - ٧)
 ويسمى الفرض البديل من الصورة

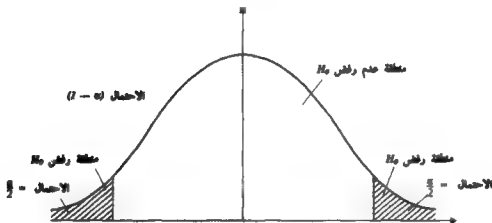
$$(H_1: \mu > \mu_0) \text{ (أو } \mu < \mu_0)$$

بالبدل بطرف واحد . وستوضح في أمثلة البند ١٦ - ٢ الفرق في طريقة العمل في الحالتين :

أنواع الخطأ فكرنا فيما سبق خطأ رفض الفرض H_0 في حين أنه صحيح فعلا . ويسمى هذا الخطأ بالخطأ الأول من الخطأ . واحتمال وقوعه هو مستوى المعنوية α للاختبار . وهناك كذلك نوع ثان من الخطأ . وهو قبول H_0 في حين أنه في الواقع غير صحيح ، وإنما الصحيح هو الفرض البديل . ويسمى هذا عادة بالخطأ الثاني من الخطأ ، ويرمز لاحتماله بالرمز β . وهكذا فإن لدينا احتمالين لنوعي الخطأ هما :

$$\alpha = P(\text{خطأ النوع الأول}) = P(H_0 \text{ رفض} / \text{صحيح})$$

$$\beta = P(H_0 \text{ خاطئ} / \text{قبول } H_0) = P(\text{خطأ النوع الثاني})$$



شكل ١٦ - ٢

وعموما ، فإننا نستطيع التحكم في α وفي الحالة المثالية نفضل أن يكون قيمة قريبة من الصفر . ولكن للأسف كلما حاولنا تقليل α فإن β تزيد . ولذلك فإنه عند توافر قدر معين من المعلومات لتسهيل الموازنة بين نوعي الخطأ . وكل ما نستطيع عمله عند تحديد مستوى المعنوية أن نقلل β بزيادة حجم العينة . وفي الاختبار الجيد تكون كل من α و β صغيرتين . ويسمى المقدار $(1 - \beta)$ قوة الاختبار ، والمطلوب أن تكون القوة قريبة من الوحدة ليكون الاختبار جيدا .

١٦ - ٢ الاختبارات التي تستخدم التوزيع الطبيعي

والآن سنطبق المفاهيم الأساسية الواردة بالجزء السابق على بعض المسائل المحددة التي تحتاج لمقياس احصائي على أساس التوزيع الطبيعي . ونظرا لنظرية الحد المركزي فإن هذا يكون صحيحا في كثير من الحالات .

وسط المجتمع : لنبحث مجتمعا توزيعه طبيعي وتباينه معروف وهو σ^2 ولكن وسطه μ غير معروف . ولناخذ هيئة يول الملاحظات x_1, x_2, \dots, x_n . ونختبر ما إذا كان μ يساوي مقدارا محددا هو μ_0 مثلا . والفرض الصغرى هنا هو $H_0: \mu = \mu_0$ والبديل ذو الطرفين هو $H_1: \mu \neq \mu_0$ فإذا كان H_0 صحيحا ، فإن المقياس الاحصائي

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

يكون له توزيع طبيعي مقياس . فلذا كان مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فإن H_0 يرفض اذا جاء المقياس الاحصائي للاختبار خارج المدى من 1.96 - إلى + 1.96 ويعني آخر يرفض H_0 إذا كان \bar{x} يقع على بعد أكثر من 1.96 خطأ قياسيا من μ_0 .

أما اذا كان المجتمع الأصلي غير طبيعي ، فإن المقياس الاحصائي للاختبار يظل طبيعيا تقريبا اذا كانت n كبيرة . وبالإضافة الى ذلك فإنه اذا كانت n غير معلومة يمكن أن نستبدلها بتقديرها غير المنحاز n^* بشرط أن تكون $n > 30$.

مثال ١٦ - ٢ - ١ : ضبطت ماكينة للملء لثملء عبوات منظف صناعي بوزن متوسطة 16 أوقية. ومعروف أن الانحراف المعياري يساوي 0.5 أوقية . ومن الضروري مراجعة الماكينة دوريا لأنها اذا كانت تملء العبوات أكثر من اللازم فإن هذا يزيد من تكاليف التنظيف . أما إذا كانت تملأها أقل من اللازم فإن الشركة تتعرض للتقاضي . وقد وزنت 25 عبلة مملوءة فأعطت وزنا صافيا قدره 16.25 أوقية . ملأى النتيجة التي يمكن الوصول اليها بمستوى معنوية 0.05 ؟

الاجابة : حيث أننا نريد أن نعلم ما إذا كانت الماكينة تعمل جيدا أم لا ، فإننا نطبق الاختبار بطرفين :

$$H_1 : \mu \neq 16 \quad \text{و} \quad H_0 : \mu = 16$$

ومستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

ولما كان معلوما أن $\sigma = 0.5$ فإننا نستخدم المقياس الاحصائي $T = (\bar{x} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ وله توزيع طبيعي مقياس . وبالتالي فإن المنطقة الحرجة هي $T \leq -1.96$ و $T \geq 1.96$ وهذا يعطينا القاعدة التالية لاتخاذ القرار .

اقبل الفرض H_0 اذا كانت T تقع بين 1.96 - و 1.96 +
أرفض H_0 في الحالات الأخرى

فلذا أعطنا عينة حجمها $n = 25$ متوسطا \bar{x} قدره 16.25 ، فإن

$$T = \frac{16.25 - 16}{0.5/\sqrt{25}} = 2.5$$

ومن الواضح أن هذه القيمة تقع داخل المنطقة الحرجة ، ولذلك نستنتج أن الماكينة لاتعمل بطريقة صحيحة . ومن المنطقي أن نوقف عملية التمتج ونعيد ضبط الماكينة .

لاحظ أنه في المثال السابق أجرى اختبار الفرض بنفس الترتيب المذكور في البند ١٦ - ١ .

مثال ١٦ - ٢ - ٢ : مدير لإحدى الإدارات يعتقد أن القيمة المتوسطة لمجتمع كبير من عروض الأسعار هي £10 . ولكن المحاسب يختلف معه ، ويعتقد أنها أقل من ذلك الرقم . وللتأكد من صحة وجهة نظره يأخذ المحاسب عينة عشوائية مكونة من 36 عرضا ، فيجد أن وسطها £9.50 و \bar{x} وتباينها £ 400 = σ^2 وضع كيفية اجراء الاختبار الاحصائي بمستوى معنوية 0.05 .

الاجابة : مرة أخرى نطبق الخطوات الست المذكورة في البند ١٦ - ١ .

١ - بما أن المحاسب يريد أن يثبت أن قيمة العروض المتوسطة أقل من £10 نطبق اختبارا بطرف واحد على أساس الفرضين .

$$H_0: \mu = 10, \quad H_1: \mu < 10$$

$$\alpha = 0.05$$

٣- في هذه الحالة σ^2 مجهولة ، ولكن نظرا لأن n كبيرة بدرجة معقولة نستخدم المقياس الاحصالي .

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

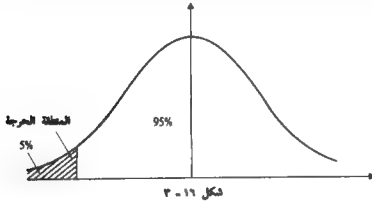
وله توزيع طبيعي قياسي .

٤- المنطقة الحرجة هي $T < -1.645$ كما هو مبين بالشكل (١٦-٣) . ومن الواضح أنه إذا كانت \bar{x} أصغر من £10 بكثير ، فإن قيمة T ستقع داخل المنطقة الحرجة .

$$T = \frac{9.50 - 10.00}{2/\sqrt{36}} = -1.5. \quad -\theta$$

٦- بما أن قيمة T لا تقع داخل المنطقة الحرجة ، فلا يوجد لدينا دليل كاف لرفض ما يعتقده المدير .

تصميم ١٦-٢ : يدهى منتج للطلاء أن علبه واحدة من الطلاء الذى يتجه تكفى لتغطية 80 مترا مربعا بالتحراف معيارى قدره 10 أمتار مربعة . ويريد مفتش حكومى أن يختبر مدى صحة هذا الزعم ، فيأخذ عينة من 36 علبه ، ويجد أن المتوسط هو 75 مترا مربعا . وهذه النتيجة أقل من المطلوب ، ولكن هل هي منخفضة بدرجة كافية بحيث يرفض الزعم ؟



الفرق بين أوساط المجموعات : هناك كثير من الحالات التى نهتم فيها بمجمعتين مختلفتين . وقد لا يكون اعتمادنا مركزا على القيم الفعلية لأوساط المجمعتين ، وإنما على تحديد ما إذا كانت هذه الأوساط متطابقة . والاختبار ذو الطرفين في هذه الحالة يقوم على الفرضين التاليين .

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

حيث تدل الأرقام 1 و 2 على المجمعتين 1 و 2 . ولاختبار هذين الفرضين نأخذ عتين عشوائيتين حجمهما n_1 و n_2 من

المجمعين . فإذا كان الفرق بين وسطى الميتين \bar{x}_1 و \bar{x}_2 كبيرا بدرجة كافية ، فالتا تقبل الفرض H_1 أن وسطى المجمعين مختلفان .

فإذا افترضنا أن المجمعين لهما توزيع طبيعي يتباين معلوم هو σ_1 و σ_2 فإنه حسب البند ١٤ - ٦ يكون توزيع الفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ طبيعيا بمتوسط قيمته $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين $\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$. وبالتالي فإن المقدار وبالتالي فإن المقدار

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

يتبع التوزيع الطبيعي القياسي . وإذا كان الفرض H_0 صحيحا ، فإن $\mu_1 - \mu_2 = 0$ وبالتالي يصبح المقياس الاحصائي لاختبار الفرق بين الوسطين ، كما يلي :

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

ويبقى هذا المقياس مناسباً حتى لو لم يكن المجمعان طبيعياً تماماً ، أو إذا كان التباين مجهولاً وحل محله $\hat{\sigma}_1^2$ و $\hat{\sigma}_2^2$ بشرط أن يكون الممدان n_1 و n_2 أكبر من 30 .

مثال ١٦ - ٢ - ٣ : أجريت دراسة لأعمار العاملين في صناعيتين لاكتشاف ما إذا كان عمر العاملين بالصناعة A أكبر من عمر العاملين بالصناعة B . وقد وجد أن متوسط عمر ثمانية من العاملين بالصناعة A هو 38.6 بانحراف معياري 4.4 سنوات وأن متوسط عمر مئة من العاملين بالصناعة B هو 36.1 بانحراف معياري 3.8 سنوات اجر الاختبار المناسب (بمستوى معنوية 1%) .

الاجابة :

$$H_0 : \mu_A = \mu_B, \quad H_1 : \mu_A > \mu_B. \quad - ١$$

$$\alpha = 0.01. \quad - ٢$$

$$T = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2/n_A + \hat{\sigma}_B^2/n_B}} \quad - ٣$$

وهذا المقدار يتبع توزيعاً طبيعياً قياسياً إذا كان الفرض H_0 صحيحاً .

٤ - المنطقة الحرجة هي $T > 2.33$.

$$T = \frac{38.6 - 36.1}{\sqrt{4.4^2/80 + 3.8^2/100}} = 4.02. \quad - ٥$$

٦ - يتضح أن T تقع داخل المنطقة الحرجة ، أي أن لدينا دليلاً كافياً على أن العمر المتوسط للعاملين بالصناعة B أقل من العمر المتوسط للعاملين بالصناعة A .

تمرين ١٦ - ٢ - ٢ : هناك خلاف بين عمال خطين للانتاج ، إذ يقول عمال خط الانتاج A ، أنهم يتقاضون أجوراً أقل مما يتقاضاه عمال خط الانتاج B . ويقوم محاسب الشركة بفحص هذا الخلاف بأن يبحث أجور 36 عمالاً من كل خط ، وقد حصل على النتائج التالية :

$$\begin{array}{lll} n_A = 36 & \bar{x}_A = £93 & \bar{s}_A = £6 \\ n_B = 36 & \bar{x}_B = £94.50 & \bar{s}_B = £7.50 \end{array}$$

أجر الاختبار المناسب .

نسب المجتمع : يمكن استخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذات الحدين الذي سبق استخدامه لحل مسائل تقدير النسبة p كذلك لاختبار الفروض عن p .

مثال ١٦ - ٢ - ٤ : يتقدم لوظائف الإدارة بشركة كبيرة 20% من الإناث (و 80% من الذكور) وعامة هناك فرق محسوس في مؤهلات وخبرات الجنسين . وتدعى مجموعة من صاحبات أسهم الشركة أن هناك تفرقة ضد النساء في سياسة الشركة للاستخدام لوظائف الإدارة . وقد تم فحص سجلات آخر 100 شخص عينوا بوظائف الإدارة بالشركة ، ووجد أن 12 منهم من النساء . هل هناك دليل على التفرقة إذا استبعدنا احتمال أى انحياز لتفضيل النساء ؟
(م ١١ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة : يمكن اعتبار أن هذه المسألة تعنى اختبار الفرضين .

$$H_1: p < 0.2 \quad \text{و} \quad H_0: p = 0.2 \quad -١$$

٢ - لتكن $\alpha = 0.05$

٣ - بما أن العدد $n = 100$ كبير بدرجة كافية ليكون التقريب الطبيعي صحيحاً ، فإن

$$T = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

له توزيع طبيعي تقاسي . و \hat{p} هنا هو نسبة العينة و p القيمة المحددة بالفرض الأولى .

٤ - إذا كانت $T > 1.645$ فإن النتائج التي حصلنا عليها تتفق مع الفرض الأولى أما إذا لم تكن ، فإن \hat{p} أقل من p بدرجة كافية لجعل H_0 غير محتمل الصحة .

٥ - وفي الواقع فإن

$$T = \frac{0.13 - 0.2}{\sqrt{0.2 \times 0.8/100}} = -1.75$$

٦ - وهذا يعطى لصاحبات الأسهم بعض الدليل على صحة ادعائهن بأن سياسة التمييز في الشركة بها تفرقة ضد النساء .

تمرين ١٦ - ٢ - ٣ : يقول مبتكر لطريقة جديدة لتحسين القراءة أن 80% من مدبري الأعمال الذين يتمون البرنامج التدريبي الذي ينظمه يستطيعون مضاعفة سرعة استيعابهم للمعلومات المكتوبة . وقد أرسلت إحدى المؤسسات 100 من مدبريها لحضور البرنامج ، وقد اتضح أن 73 منهم أظهروا تحسناً محسوساً . هل يكفي ذلك للتحقق من صدق مايقوله صاحب الطريقة ؟

(م ١١ - الجزء الأول - ديسمبر ١٩٧٧)

الفروق بين النسب هذه المسألة تصادفنا كثيرا في العمل الاحصائي . وعلى سبيل المثال قد نحتاج لمعرفة ما إذا كان هناك فرق بين نسبة المدخنين ، وغير المدخنين الذين يعانون من مرض ما . أو ما إذا كان هناك فرق بين النسبة المئوية للسائقين المراهقين من الصبيان أو البنات الذين يرتكبون حوادث قاتلة . ويمكن معالجة المسائل من هذا النوع اعتبارها اختبار للفرض $H_0: p_1 = p_2$ حيث \bar{p}_1 و \bar{p}_2 نسب الصفة التي نهتما في مجتمعين فإذا رمزنا لحجم العيتين بالرمزين n_1 و n_2 وللنسب الناتجة في العيتين بالرمزين p_1 و p_2 فإنه يمكن تقريب المتغير $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ بواسطة توزيع طبيعي متوسطه : $p_1 - p_2$ وانحرافه المعياري

$$\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

وبافتراض أن $H_0: p_1 = p_2$ صحيح ، فإن وسط التوزيع $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ يساوى صفرا . كما يمكن تصحيح الانحراف المعياري بجعل $p_1 = p_2 = p$ بحيث أن

$$\hat{p} = \frac{n\bar{p}_1 + n\bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{\text{عدد المفردات ذات الصفة في العيتين}}{\text{المعد الكلي للمفردات في العيتين}}$$

وعندئذ يكون المقياس الاحصائي هو :

$$T = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}}$$

فإذا كان لدينا بديل بطريقتين نرفض الفرض H_0 إذا كانت T أكبر من 1.96 أو أصغر من -1.96 — عندما يكون مستوى المنعونة 0.05 .

مثال ١٦ - ٢ - ٥ : ابلغت المراجع الداخلي بما يلي باعتبارك محاسب الادارة بالشركة :

« وجد 210 خطأ في عينة من 1000 خطاب برهني قبل ادخال النظام المتري وبعد ادخال النظام وجد 250 خطأ في عينة من 1000 خطاب . ويبدو من ذلك أنه - حيث أن الموظفين لم يتغيروا - فلا بد أن دقة ارسال الخطابات قبل ادخال النظام المتري كانت أفضل . والمطلوب اتخاذ الاجراءات لاستعادة الدقة السابقة . »

(أ) ماهو القرض الاحصائي الذي تنطوي عليه تلك العبارة ؟

(ب) قيم هذا الفرض واذكر ما إذا كان سيؤثر على قراءك كمحاسب للادارة في اتخاذ اجراء ما .

(م م ت أ - الجزء الاول - مايو ١٩٧٤)

الإجابة: لنفرض أن المجتمع رقم (١) يضم كل الخطابات المرسله قبل ادخال النظام المتري والمجتمع رقم (٢) يضم الخطابات المرسله بعد ادخاله . ولما كان محاسب الادارة سيتخذ اجراء فقد اذا كانت نسبة الأخطاء قد زادت معنويا ،

فإننا نضع فرصتين هما $H_0: p_1 = p_2$ و $H_1: p_1 < p_2$

وبأخذ $\alpha = 0.05$ تكون المنطقة الحرجة $T < -1.645$

ولحساب T يلزم أولا معرفة المقادير التالية

$$n_1 = n_2 = 1000, \bar{p}_1 = \frac{210}{1000}, \bar{p}_2 = \frac{250}{1000}, \hat{p} = \frac{210 + 250}{1000 + 1000} = \frac{230}{1000}$$

$$T = \frac{0.21 - 0.25}{\sqrt{0.23 \times 0.77 \times (0.001 + 0.001)}} = -2.13$$

وهكذا نوجد

ولما كانت القيمة المحسوبة لـ T تقع في المنطقة الحرجة ، فإتينا نقبل الفرض الغالب بأن نسبة الأخطاء قد زادت . ويبدو أنه لا بد من اتخاذ إجراء ما ، وربما كان تنظيم برنامج تدريبي للمعاملين على النظام المترى لتحسين الأداء .

تمرين ١٦ - ٢ - ٤ : أجرت شركة تنتج متجا نمينا بحثا للسوق في ستين متتاليتين على الأمر التي يزيد دخلها على £10 000 في العام . وكانت نتيجة البحث كما يلي

	1973	1974
حجم العينة	1300	1000
عدد من يخطئون المنتج	351	240

ويأخذ منطقة الرفض خارج 2.33 انحرافها معياريا ، هل يدل مسح عام 1974 على أن المبيعات تتناقص ؟
(م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

١٦ - ٣ اختبارات نستخدم توزيع - ٤

عندما تكون لدينا عينات صغيرة ، فإننا كثيرا ما نستخدم توزيع - ٤ لستودنت ، كما استخدمنا سابقا بالنسبة لفترات الثقة .

وسط المجتمع : إذا أخذت عينة مفرداتها x_1, x_2, \dots, x_n من مجتمع طبيعي وسطه μ وله تباين مجهول σ^2 فإن التوزيع المضبوط للمقدار $(x - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ هو توزيع - ٤ له $\nu = n - 1$ من درجات الحرية . وحتى لو لم يكن المجتمع الأصلي طبيعيا ، فإن هذه النتيجة صحيحة تقريبا . ونستخدم هذه النتيجة الآن في الاختبار .

مثال ١٦ - ٣ - ١ تشتري شركة غسمة منتجات من مورد يقول أنه يتوقع أن يكون عمر المنتج 1050 ساعة . وقد عاشت المنتجات لمدة 964 , 1082 , 1136 , 825 و 863 ساعة . ولم تكن هذه النتيجة مرضية للشركة . والمطلوب قبل إرسال شكوى للمورد تحليل النتائج وتقديم التوصيات .

- ١ - لماذا يجب أن يكون هدف التحليل ؟
- ٢ - أجر التحليل المناسب ، وأذكر ما إذا كان يجب تأييد الشكوى ، أم لا ؟
- ٣ - ما هو أقل عمر للأجزاء تعتبر أنه يتفق مع ادعاء المورد ؟

(ج د م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

الاجابة : في هذه المسألة نريد أن نعرف ما إذا كان عمر المنتجات أقل معنويًا من العمر المتناظر المذكور ، أو بمعنى آخر ما إذا كان الفرق يمكن أن يكون ناجمًا عن الصدفة . فلذلك نضع الفرضين :

$$H_0: \mu = 1050, H_1: \mu < 1050. \quad - ١$$

$$\alpha = 0.05. \quad - ٢$$

$$٣ - \text{المقدار } T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ يتبع توزيع - ٤ بـ } \nu = n - 1 = 4 \text{ درجات حرية}$$

- ٤ - لدينا اختبار بطرف واحد ، ولذا فإن المنطقة الحرجة هي $T < -2.13$
 ٥ - من البيانات المحطة لدينا

$$n = 5, \bar{x} = 974, s = 134.66$$

وبالتالى فإن

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = 66.02.$$

وهكذا فإن

$$T = \frac{974 - 1050}{66.02} = -1.262$$

وهذه القيمة لا تقع فى المنطقة الحرجة .

- ٦ - لا نرفض الفرض H_0 ونستنتج أن بيانات العينة لا تعطينا الدليل الكافى لتكليب العمر المتوسط المذكور .
 وفى الواقع ، فإننا لا نختلف مع المنتج فى ادعائه إلا إذا وقعت T فى المنطقة الحرجة أو بمعنى آخر إذا كانت

$$\frac{\bar{x} - 1050}{66.02} < -2.13$$

- أى أن $\bar{x} < 922$. أما إذا كان العمر المتوسط أكبر من 922 ساعة فإن هذه البيانات تكون متفقة مع ما يقوله المنتج .
 ويمكن كذلك استخدام اختبار t لمقارنة مجتمعين عندما يكون هناك اقتران طبيعى لكل زوج من بيانات العينة .
 مثال ١٦ - ٣ - ٢ : أجريت التجربة التالية لاختبار فعالية عامل مجفف فى نوع من الطلاء . أعدت ست حبات ، وقسم كل منها إلى نصفين . ثم طلى نصف العينة بالطلاء المحتوى على العامل المجفف ، وطلّى النصف الثانى بالطلاء الذى لا يحتوى على العامل المجفف . وقد تركت العينات لتجف ، فأخذت الوقت التالى للجفاف .

	زمن الجفاف (بالساعة)					
	رقم العينة					
	1	2	3	4	5	6
طلاء محوى على المجفف	3.4	3.8	4.2	4.1	3.5	4.7
طلاء بدون المجفف	3.6	3.8	4.3	4.3	3.6	4.7

والمطلوب :

- اجراء اختبار t لتحديد فعالية العامل المجفف . اذكر أسباب اختيار اختبار بطرف واحد أو بطرفين . اشرح النتائج التى وصلت إليها شرحاً واضحاً .

(ح ٢٢ - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٥)

- الإجابة : لما كانت كل عينة تعطى رقمين : واحداً لكل طرف من الطرفين ، نرى أن هناك اقتراناً طبيعياً لكل زوج من القيم .

ولكى نحدد ما إذا كان هناك فرق معنوي بين المجتمعين ، توجد الفروق بين كل زوج من الملاحظات كما يلي :

$$0.2 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.1 \quad 0$$

ولنفرض الآن أن هذه الفروق تأتي من مجتمع للفروق وسطه μ . فإذا كانت $\mu > 0$ يكون العامل المجفف فعالاً ، وإلا فإن العامل المجفف ليس له أثر ، أو أن أثره سلبى ويتلخص الاختبار فى الفرضين

$$H_0: \mu = 0, \quad H_1: \mu > 0$$

ونحتاج لاجرائه الطريقة المشروحة فى المثال ١٦ - ٣ - ١ .

$$H_0: \mu = 0, \quad H_1: \mu > 0 \quad - ١$$

$$\alpha = 0.05 \quad - ٢$$

٣ - المقدار $T = (\bar{x} - \mu) / (\hat{\sigma} / \sqrt{n})$ يتبع توزيع t بدرجات حرية $5 = 6 - 1 = v$ حيث x و $\hat{\sigma}$ هى المستبقة من فروق الميئات .

٤ - المنطقة الحرجة هى $T > 2.01$.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{0.6}{6} = 0.1 \quad - ٥ \quad \text{لدينا}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)} = 0.0894 \quad \text{و}$$

$$T = \frac{0.1}{0.0894/\sqrt{6}} = 2.74 \quad \text{وهكذا فإن :}$$

وتقع فى المنطقة الحرجة

٦ - نرفض الفرض H_0 ، ونستنتج أن هناك دليلاً كافياً على أن العامل المجفف له أثر طيب ، إذ أن احتمال أن يكون التحسن الظاهر ناتجاً عن الصدفة احتمال ضئيل جداً .

تمرين ١٦ - ٣ - ١ : وجدت شركة لبيع الفسالات الكهربائية أن بائعيها القدامى يبيعون 5.5 غسالة فى الأسبوع فى المتوسط . وعند تعيين بائع جديد يُختبر لمدة خمسة أسابيع ولا يمين بصفة مستديمة إلا إذا حقق مبيعات قدرها 4.8 غسالة فى الأسبوع على الأقل . وقد استطاع أحد البائعين الجدد أن يبيع 5 ، 3 ، 4 ، 6 و 5 غسالات وبالتالي فشل فى الاختبار . وقد احتج البائع على ذلك معلناً أن الاختبار غير عادل ، وأنه يستطيع أن يبيع على المدى البعيد مثله مثل البائعين القدامى وفى نفس الوقت فقد فشل فى الاختبار .

والمطلوب :

(١) اجراء الحسابات اللازمة والتعليق على ادعاء البائع .

(٢) حساب أقل مبيعات أسبوعية متوسطة فى فترة اختبار مدتها خمسة أسابيع يرفض البائع الجليل إذا لم يحققها .
(جـ - م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٧)

الترباط : في الفصل التاسع بحثنا حساب واستخدام معامل ترباط بسيط r للعينة وكثيراً ما تكون القيم التي يحسب منها هذا المعامل هي عينات مكونة من أزواج من القيم من مجتمع . ويمكن استخدام r لاستنباط النتائج عن معامل ترباط المجتمع المجهول R . وأبسط نتيجة نريد أن نصل إليها هي ما إذا كان هناك ترباط بين المتغيرين . وعندئذ يكون لدينا الفرضان

$$H_0 : R = 0, \quad H_1 : R \neq 0$$

وإذا كانت الميكان من توزيعين طبيعيين تقريباً ، فإن المقياس الاحصالي للاختبار

$$T = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}$$

يتبع توزيع t - بدرجات حرية $v = n - 2$. ويمكن اختبار الفرضين بالمقارنة بقيمة حرجة لتوزيع t - عند مستوى معين للمعنوية . ولتأخذ مرة أخرى المثال الذي بحثناه في البند ٩-١ .

تعطى البيانات التالية التكاليف لكل وحدة منتجة (y) ومجموعة الانتاج (x) لدى أحد المنتجين :

التكاليف لكل وحدة منتجة (£)	20	14	12	14	15	9	9	8	28	11
الانتاج الكلي	10	18	25	20	16	30	32	34	9	24

(البيانات مأخوذة من م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٤)

وقد بينا في البند ٩-١ أن معامل ترباط العينة هو -0.907 . ولا يبدو ممكناً الحصول على مثل هذه القيمة بمجرد الصدفة . ومع ذلك فللاختبار الموضوع بدقة سنسير على نفس الخطوات المشروحة أعلاه .

$$H_0 : R = 0, H_1 : R \neq 0 \quad - ١$$

$$\alpha = 0.05 \quad - ٢$$

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{المقدار} \quad - ٣$$

يتبع توزيع t - بدرجات حرية $v = 10 - 2 = 8$

$$- ٤ \quad \text{المنطقة الحرجة هي } T > 2.31 \text{ و } T < -2.31$$

$$T = \frac{-0.907\sqrt{8}}{\sqrt{1-(-0.907)^2}} = -6.09 \quad - ٥$$

- ٦ وحيث أن T المحسوبة أقل من -2.31 فإن الفرض الأولي الذي ينص على عدم وجود ترباط يعتبر مرفوضاً .

تمرين ١٦ - ٣ - ٢ : أجريت دراسة في إحدى المدن الكبرى لبحث العلاقة بين العمر والدخل . وقد أخذت عينة من ٩ أفراد وكانت النتيجة كما يلي :

العمر	36	52	30	21	65	24	42	39	45
الدخل (£)	5780	6350	5750	5925	7900	4630	6700	6850	7500

أجر اختباراً لوجود ترباط عند مستوى المعنوية 0.05 .

تمارين :

١٦ - ١ الطريقة القياسية التي تستخدمها شركة لاكتشاف المعيبات في أحد المنتجات تستطيع كشف 90% من المعيبات الموجودة طبقاً لما أظهرته الخبرة السابقة .

والمطلوب :

(١) حساب الخطأ المعياري لنسبة المعيبات المكتشفة في 100 وحدة مفحوصة وإيجاد احتمال عدم اكتشاف 15 معيبة ، أو أكثر بين 100 معيبة بواسطة هذه الطريقة .

(٢) اقترحت طريقة أخرى للكشف عن المعيبات وعند اختبارها ظهر أنها تكتشف 368 من 400 معيبة . أثبت أن الطريقة الجديدة لا تعطي تحسناً معنوياً في معدل الاكتشاف .

(ج د م - م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٧)

١٦ - ٢ يقول منتج للمعدات الكهربائية أنه قد طور لمبة جديدة للأنارة تعيش لمدة 1000 ساعة . واختبار صحة هذا القول أخذت عينة من 16 لمبة ، وأعطت الاختبارات $\bar{x} = 965$ و $s = 40$ أجر اختبار مناسباً للفروض عند مستوى المعنوية 0.05 .

١٦ - ٣ من المعروف أن عمر مكون كهربائي معين يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 250$ ساعة ويدهى المنتج أن العمر المتوسط للمكون 5000 ساعة على الأقل . واختبار هذا الزعم اختبرت عينة عددها 16 مكوناً فأعطت عمراً متوسطاً قدره $\bar{x} = 4850$ ساعة اختبر صحة الزعم عند مستوى المعنوية 5% .

الفصل السابع عشر

اختبارات كاي - تربيع

١٧-١ توزيع كاي - تربيع

استخدمنا سابقاً اختبارات فرضية لمقارنة مقاييس نوعية للبيانات (بيانات تختص بالكميات) والآن نستخدم اختبارات تقارن تكرارات الحدود .

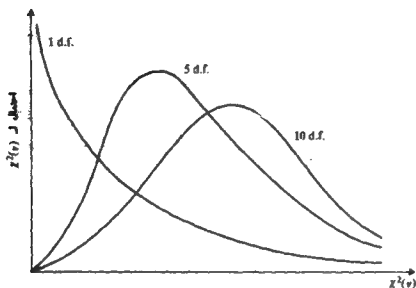
نفرض أن لدينا فئة من التكرارات المشاهدة O_1, O_2, \dots, O_n ونود أن نخبر بعض الفروض حول هذه التكرارات . دعنا نفرض أنه إذا كان فرضنا صحيحاً تماماً ، فلننا يجب أن نتوقع التكرارات E_1, E_2, \dots, E_n وهي التكرارات المتوقعة . والاختبار الاحصائي لاختبار الفرق بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة هو

$$\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \dots + \frac{(O_n - E_n)^2}{E_n}$$

والذي يمكن كتابته باختصار على الصورة

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

(χ هو الحرف اليوناني كاي) . والآن إذا كان فرضنا صحيحاً يجب أن نتوقع أن الاحصاء χ^2 يكون صغيراً لأن الفروق بين التكرارات المناظرة المشاهدة والمتوقعة تكون صغيرة ، ولكن إذا كان الفرض غير صحيح تماماً فإن بعض الفروق تكون كبيرة ، وبالتالي فإن الاحصاء χ^2 يكون كبيراً ، ونحتاج إلى تعيين قيمة بحيث أنه إذا وقع الاحصاء χ^2 أسفلها يمكن أن نعتقد أن الفرض قد يكون صحيحاً . ولكن إذا كان الاحصاء χ^2 يقع فوقها يمكننا استنتاج أن الفرض خاطئ . مثل هذه القيم مقسمة بواسطة جداول χ^2 (نظر ملحق الكتاب رقم ٢) . وكما في التوزيع - t توجد توزيعات كثيرة تعتمد على عدد درجات الحرية كما هو موضح في شكل ١٧-١ .



شكل ١٧-١

مثال ١٧-١ : إذا كانت الأعداد المرفوضة في ست كميات ذات حجم متماثل ممثلة في الجدول التالي :

كميات	الأعداد المرفوضة
A	270
B	308
C	290
D	312
E	300
F	320

فاختبر الفرض الذي يقول بأن الفرق بينها يرجع إلى الصدفة مستخدماً مستوى معنوياً 0.05 .

(م م أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : طبقاً للفرض بأن كل كمية تحتوى على عدد متماثل من المرفوض ، فإن العدد المتوقع للمرفوض في كل كمية هو

$$\frac{1}{6} (270 + 308 + 290 + 312 + 300 + 320) = 300$$

وكما نعلم أن مجموع التكرارات المشاهدة هو 1800 فإن مجموع التكرارات المتوقعة لابد وأن يكون هو نفسه . ولهذا فإن التكرار المتوقع للكمية الأخيرة يتعين عندما نعرف التكرارات المتوقعة للكميات الخمس الأولى . ولهذا فإن عدد درجات الحرية $v = 6 - 1 = 5$ ومن الجداول ، المنطقة الحرجة تكون $\chi^2_{\text{test}} > 11$ عند مستوى معنوي .

والقيمة الحقيقية للاحصاء χ^2 تكون

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(270 - 300)^2}{300} + \frac{(308 - 300)^2}{300} + \frac{(290 - 300)^2}{300} + \frac{(312 - 300)^2}{300} + \frac{(300 - 300)^2}{300} + \frac{(320 - 300)^2}{300} \\ &= 3.00 + 0.21 + 0.33 + 0.48 + 0.00 + 1.33 \\ &= 5.35 \end{aligned}$$

الاحصاء χ^2 لا يقع في المنطقة الحرجة . ولهذا لا يكون لدينا دليل للشك في أن الفروق بين الأعداد المفروضة في كل كمية يرجع إلى أى سبب آخر غير الصدفة .

وفي هذه المرحلة يتضح أن اختبار χ^2 يمكن استخدامه فقط عندما تكون كل التكرارات المتوقعة ليست أقل من 5 وإذا كان هذا الشرط قاسياً ، فإنه يحدث عدم دقة في الاختبار . ولتجنب هذه الصعوبة يكون غالباً من الضروري تجميع تكرارات الفئات المتجاورة .

تمرين ١٧-١-١ : عدد الأعطال التي حدثت في آخر 100 نفلة موضعاً كما يلي :

عدد الأعطال لكل نفلة التكرار :	0	1	2	3	4	5
العدد المتوقع للنفلات	14	27	27	18	9	5
العدد الحقيقي للنفلات	10	23	25	22	10	10

بين ما إذا كان المدير حقن في طلبه أن الفرق بين العدد الحقيقي ، والمتوقع للأعطال يرجع إلى الصدفة . من المؤلف استخدام 0.05 مستوى معنى .

(م م ت - الجزء الأول - مايو ١٩٧٣)

١٧-٢ اختبارات جودة التوفيق

تستخدم اختبارات جودة التوفيق في اختبار ما إذا كانت فئة التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن توزيع احتمالي معين ، كمثال ، توزيع ذات الحدين أو توزيع بواسون أو التوزيع الطبيعي . والإجراء هو حساب أفضل تقديرات للبارامترات التي تنتمي لتوزيع احتمالي معين باستخدام التكرارات المشاهدة . بعد ذلك نستخدم هذه التقديرات لحساب التكرارات المتوقعة للتوزيع ونقارنها بالتكرارات المشاهدة . ومرة أخرى ، التكرار المتوقع لا يجب أن يقل عن 5 .

وفي اختبارات جودة التوفيق ، عدد درجات الحرية لتوزيع χ^2 يتحول إلى

$$u = \text{عدد الفئات} - 1 - \text{عدد البارامترات المقدرة}$$

وحيث أن الاحصائيين غالباً ما يهتمون بحدوث ، أو عدم حدوث التوزيع الطبيعي فإننا نعطي المثال التالي :

مثال ١٧-٢-١ : عينة عشوائية من رجال الأعمال طلب منها تقدير معدل النجاح في حملة دعائية صناعية ، ومقياس التقدير كان من 0 إلى 100 . والنتائج هي كما في الجدول التالي :

مقياس	التكرار المقدر
0 وأقل من 10	0
10 وأقل من 20	0
20 وأقل من 30	0
30 وأقل من 40	8
40 وأقل من 50	16
50 وأقل من 60	13
60 وأقل من 70	23
70 وأقل من 80	15
80 وأقل من 90	16
90 وأقل من 100	9
	100

الوسط $\bar{x} = 65.5$ والانحراف المعياري $s = 17.6$

المطلوب اختبار الفرض بأن التقديرات المعطاة من العينة من رجال الأعمال لها التوزيع الطبيعي . (استخدم 5% مستوى معنوي)

(م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٦)

الاجابة : نختبر هنا أن هذه البيانات لها التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2 وحيث أن $n=100$ كبيرة فمن الممكن أن نستخدم $\bar{x} = 65.5$ و $s = 17.6$ كتقديرات لـ μ ، σ على الترتيب . (إذا كانت n صغيرة ، فمن الضروري استخدام $\hat{\sigma}$ بدلا من s) ونحتاج الآن إلى حساب التكرارات المتوقعة لمثل هذا التوزيع الطبيعي الواقع خلال الفئات السابقة .

ونفرض أن x متغير عشوائي من توزيع طبيعي بوسط 65.5 وانحراف معياري 17.6 وأن z له التوزيع الطبيعي المعياري ، فإن

$$P(x < 30) = P\left(z < \frac{29.5 - 65.5}{17.6}\right) = P(z < -2.05) = 0.020$$

لاحظ استخدام التصحيح المتصل (استخدام 29.5 وليس 30) في هذا الحساب لذلك نتوقع $0.02 \times 100 = 2.0$ من القيم ، باعطاء تقدير أقل من 30 وبالمثل .

$$P(30 \leq x < 40) = P(-2.05 < z < -1.48) = 0.049$$

نتوقع $4.9 = 0.049 \times 100$ من القيم في الفترة 30 وأقل من 40 ونفس الطريقة نحصل على

$$P(40 \leq x < 50) = P(-1.48 < z < -0.91) = 0.112$$

ونتوقع 11.2 من القيم تقع في الفئة التالية . وباستمرار هذه الطريقة نستطيع أن نحصل على القيم المتوقعة التي تقع في كل الفئات .

الفئة	تكرار مشاهد	تكرار متوقع
أقل من 30	0	2.0
30 وأقل من 40	8	4.9
40 وأقل من 50	16	11.2
50 وأقل من 60	13	18.6
60 وأقل من 70	23	22.4
70 وأقل من 80	15	19.7
80 وأقل من 90	16	12.5
90 وأقل من 100	9	6.0
أكثر من 100	0	2.7

وبلاحظ أننا جمعنا أول فئتين (وآخر فئتين) لتغلب على صعوبة الحصول على تكرارات متوقعة أقل من 5 .

الاحصاء x^2 يكون حسابه

$$\chi^2 = \frac{(8 - 6.9)^2}{6.9} + \frac{(16 - 11.2)^2}{11.2} + \dots + \frac{(9 - 8.7)^2}{8.7} = 6.05$$

هذا الاحصاء مؤسس على توزيع χ^2 بدرجات حرية 4 (لأننا سبع فئات ، ولكن فقدت ثلاث درجات حرية بوضع ثلاثة قيود على التكرارات المتوقعة ، الوسط والانحراف المعياري والمجموع الكلي) . وحيث أن 6.05 أقل من القيمة الحرجة 9.49 فإننا لا نشك في أن البيانات المشاهدة لها التوزيع الطبيعي .

مثال ١٧ - ٢ : الجدول الآتي يبين أن العدد المشاهد من الماكينات المعطلة في اليوم في أحد المصانع الهندسية خلال مدة 50 يوماً .

عدد الماكينات المعطلة في اليوم x	التكرار المشاهد f
0	4
1	9
2	15
3	11
4	5
5	4
6	1
7	1

ويعتقد أن توزيع تعطل الماكينة في اليوم يطابق توزيع بواسون . احسب العدد المتوسط للأعطال في كل يوم ، ثم اختبر هذا الافتراض عند 5% مستوى معنوي .

$$\frac{\sum fx}{\sum f} = \text{العدد المتوسط للأعطال} \quad \text{الاجابة:}$$

$$= \frac{(0 \times 4) + (1 \times 9) + (2 \times 15) + (3 \times 11) + (4 \times 5) + (5 \times 4) + (6 \times 1) + (7 \times 1)}{50} = 2.5$$

في البند ١٤ - ٣ رأينا أن البارامتر m في توزيع بواسون العام هو وسط التوزيع. ولهذا

$$P(x \text{ أعطال عندما } x) = \frac{2.5^x e^{-2.5}}{x!}$$

$$\text{حيث } x = 0, 1, 2, \dots$$

القيم المتوقعة ، بفرض توزيع بواسون ، تبين في الجدول الآتي :

x	$P(x)$	التكرار المتوقع = $50 P(x)$	التكرار المشاهد
0	0.082	4.1	4
1	0.206	10.3	9
2	0.256	12.8	15
3	0.214	10.7	11
4	0.134	6.7	5
5 أو أكبر	0.108	5.4	6

$$\chi^2 = \frac{(4-4.1)^2}{4.1} + \frac{(9-10.3)^2}{10.3} + \frac{(15-12.8)^2}{12.8} + \frac{(11-10.7)^2}{10.7} + \frac{(5-6.7)^2}{6.7} + \frac{(6-5.4)^2}{5.4}$$

$$= 1.05$$

وحيث أن عدد البارامترات المستخدمة في تقدير التكرارات المتوقعة هو 1 (ولترمز للوسط بالرمز μ) ويكون عدد درجات الحرية $4 = 6 - 1 - 1$.

القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بـ 4 درجات حرية هي 9.49 . وبما أن $1.05 < 9.49$ نستنتج أن توزيع بواسون ، هو توفيق جيد للبيانات .

تعيين ١٧ - ٢ - ١ : معمل أبحاث هندسية ، يشتري صندوقاً واحداً به 12 مسماراً فلاروط بصمولة من كل 100 مصنع مختلف . أختبر تلف كل مسمار ووجد أن توزيع التلف كما يلي :

عدد التلفيات	0	1	2	3	4	5
عدد الصندوق التي بها هذه التلفيات	80	12	3	3	1	1

أحسب العدد المتوسط للتلف في كل صندوق ، وبين أنه إذا فرض أن كل الصناديق متماثلة في اختبار التالف ، فإن احتمال التلف يكون 0.03 .

بعد تجميع مناسب للبيانات ، اختبر عند المستوى 5% ما إذا كانت المشاهدات تتفق مع توزيع ذات الحدين . وعلق على النتيجة .

١٧ - ٣ جداول الاقتران

إذا كان كل عضو في عينة يمكن تصنيفه تبعاً لمقياسين للتصنيف ، فإن النتائج يمكن عرضها في جدول الاقتران . جداول الاقتران تستخدم في اختبار استقلال اثنين من العوامل من وجهة أن المعلومات عن الخلية التي تم تصنيف فيها واحدة من المشاهدات التي تتعلق بأحد العوامل ليس لها تأثير على احتمال الوجود في إحدى الخلايا للعامل الآخر . دعنا نعتبر الموقف الآتي : في مسح إحصائي قومي موسع لمستويات الأجور ، كانت البيانات التي تتعلق بمعضوية الاتحادات التجارية ، معدلات الأجور جمعت من عينة من 100 شركة واعتبار صف على أنه (مرتفع) أو منخفض ، بالنسبة إلى معيار اختياري . والنتائج التي تم الحصول عليها ملخصة كالآتي :

معدلات الأجور			
مرتفع	منخفض	مرتفع	منخفض
37	31		
11	21	مختلج	مختلج

(البيانات مأخوذة من م ١١ - الجزء الأول - يوليو ١٩٧٤)

لدينا هنا مثال على جدول الاقتران ، في الحقيقة أنه 2×2 جدول اقتران ، لأن كل عامل (معدلات الأجور وعضوية الاتحاد) قسم إلى خليتين . وجدول الاقتران العام يشار إليه بأنه $r \times c$ جدول اقتران حيث r عدد الصفوف و c عدد الأعمدة في جدول الاقتران .

وفي المثال السابق نريد ايجاد ما إذا كان هناك أى دليل على وجود علاقة بين عضوية الاتحاد ومعدلات الأجور . الفروض التي تختبر هي

H_0 : لا يوجد ربط بين عضوية ومعدلات الأجور (أى أن الاستقلال موجود)

H_1 : توجد علاقة بين العاملين .

افرض أن $\alpha = 0.05$.

وطبقاً للفرض الأولي (الصفري) أن العاملين مستقلين ، فاحتمال أن المشاهدة تقع في خلية خاصة في الصف i والعمود j ، مثلاً ، هو حاصل ضرب احتمال أنها تقع في الصف i في احتمال أنها تقع في العمود j . وإذا اعتبرنا الخلية التي في الشمال الأعلى من المثال السابق فإن :

احتمال (معدل أجر مرتفع) \times احتمال (عضوية اتحاد مرتفع) $\times 100 =$ التكرار المتوقع

$$= 100 \times \frac{68}{100} \times \frac{48}{100} = \frac{68 \times 48}{100} = 32.64$$

ولاحظ أن هذه القيمة تم الحصول عليها بضرب مجموع الصف الأول ومجموع العمود الأول ، ثم بالقسمة على المجموع الكلى . بنفس الطريقة تماماً يمكن أن نوضح النتيجة العامة الآتية :

التكرار المتوقع لأي خلية يتم الحصول عليها من حاصل ضرب مجموع صفها في مجموع عمودها مقسوماً على المجموع الكلى .

باستخدام هذه النتيجة العامة نحصل على التكرارات المتوقعة للبيانات السابقة :

معدلات الأجور			
عضوية الاتحاد	مرتفع منخفض	معدلات الأجور	
		مرتفع	منخفض
مرتفع	منخفض	32.64	35.36
	مرتفع	15.36	16.64

مرة أخرى ، نقدر ما إذا كانت التكرارات المتوقعة ، المحسوبة طبقاً لصحة الفرض H_0 تختلف معنوياً عن التكرارات المشاهدة أم لا . الاختبار الاحصائي ، كما سبق ، هو

$$\chi^2 = \sum_{\text{كل الفئات}} \frac{(O - E)^2}{E}$$

وله توزيع χ^2 بدرجات حرية $(r-1)(c-1)$ عندما يكون H_0 صحيحاً . ونحصل على عدد درجات الحرية على النحو التالي :

$$\begin{aligned} & (\text{عدد المجاميع المستقلة}) \times (\text{عدد الفئات}) \\ & = rc - (r-1) - (c-1) - 1 \\ & = (r-1)(c-1) \end{aligned}$$

وبالرجوع إلى البيانات السابقة نرى أن القيمة الحرجة هي 3.84 عندما يكون عدد درجات الحرية مساوياً $1 = (2-1)(2-1)$. وهنا

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(37-32.64)^2}{32.64} + \frac{(31-35.36)^2}{35.36} + \frac{(11-15.36)^2}{15.36} + \frac{(21-16.64)^2}{16.64} \\ &= 3.50 \end{aligned}$$

ولا نرفض H_0 أى لا يوجد دليل كاف لتدعيم الادعاء بأنه توجد علاقة بين عضوية الاتحاد ومعدلات الأجور . وسوف نعتبر الآن مثالا آخر .

مثال ١٧ - ٣ - ١ : عمل فحص على تأخير دفع الفواتير من قبل العملاء لشركة أعطيت التفاصيل للموضع الحالي في الجدول الآتي ، والأرقام في الجدول تمثل عدد العملاء .

مواقف العملاء	رتبة الشركة العميلة		شركات محدودة عامة
	شركات محدودة خاصة		
	يرأس مال > 10 مليون	يرأس مال < 10 مليون	
بطيء جداً (< 4 شهور)	20	10	10
بطيء (3 و 4 شهور)	16	14	12
متوسط (1 و 3 شهور)	22	12	10
سريع (> 1 الشهر)	8	8	8

المطلوب منك عمل تحليل احصائي بين ما إذا كان هناك علاقة بين رتبة الشركة وحالتها كدافع . استخدم 5% مستوى معنوي ، وبين بوضوح طريقة الحل .

(٢٢ م أ - المهني ١ - نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة :

١ - H_0 : لا يوجد علاقة بين رتبة الشركة العميلة وحالتها كدافع .

H_1 : يوجد علاقة ما بين هذه العوامل .

- ٢- مستوى المعنوية هو $\alpha = 0.05$.
- ٣- الاحصاء χ^2 له توزيع χ^2 بدرجات حرية عددها 6 .
- ٤- المنطقة الحرجة هي $\chi^2 > 12.6$.
- ٥- الجدول الآتي لل تكرارات المتوقعة ، ثم الحصول عليه بالطريقة العادية بضرب مجموع الصف في مجموع العمود ثم القسمة على المجموع الكلي .

17.6	11.7	10.7
18.5	12.3	11.2
19.4	12.9	11.7
10.6	7.0	6.4

$$\chi^2 = \frac{(20 - 17.6)^2}{17.6} + \dots + \frac{(8 - 6.4)^2}{6.4} = 3.1.$$

٦- لا يوجد دليل لدعم الادعاء بأنه توجد علاقة بين رتبة الشركة ، وحالتها كدافع .

تمرين ١٧-٣ : قوالب طوب مصنعة في فترتين رتبته كدرجة أولى (عالي الجودة) ودرجة ثانية (متوسط الجودة) وشائع (رديء الجودة) . وانتاج الطوب في فترة معينة كان كما يلي :

	المجموع (بالآلاف)	الفاصل (بالآلاف)	درجة ثانية (بالآلاف)	درجة أولى (بالآلاف)
فرن A	80	13	43	24
فرن B	120	32	57	31

خطة العمل لانتاج الطوب من النوع عالي الجودة بقدر الامكان ، وانتاج العدد من الدرجة الثانية والشائع يرجع إلى كفاية ، أو عدم كفاية العمل . استخدام اختبار χ^2 لتصنيف ما إذا كان مدير الفرن A له الحق في الادعاء بانتاج الطوب من النوع عالي الجودة عن زميله في الفرن B .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٥)

توزيع كاي - تريخ هو توزيع متصل ، بينما التكرارات المشاهدة هي مقاييس منفصلة هذا يسبب عدم دقة بسيطة عندما يكون عدد درجات الحرية صغيراً والمجموع الكلي للتكرارات المشاهدة صغير . ويمكن الحصول على دقة أكثر في جداول الاقتران من النوع 2×2 إذا استعملنا تصحيح يتسي المتصل . وهذا يتم بطرح $\frac{1}{2}$ من القيمة المطلقة لكل مرفق قبل التوزيع ، أي أن

$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(|O - E| - 0.5)^2}{E}$$

تمارين

- ١٧-١ (أ) وجد أن ارتباطاً واضحاً بين خاصيتين ظهرتتا من بعض البيانات هو الخط الفاصل للمعنوية الاحصائية . اشرح هذه النتيجة مع ذكر العمل الذي يجب أن يتم للوصول إلى قرار أوضح .

(ب) شركة تستخدم ثلاث أنواع من ماكينات A و B و C لإنتاج وحدات معرضة بشدة لنوع خاص من العيوب . وتوضح عينة عشوائية من 100 وحدة من كل ماكينة العدد من الوحدات السليمة والوحدات المعيبة كما يلي :

		سليم	معيبة
ماكينة	A	33	67
	B	39	61
	C	48	52

المطلوب :

استخدم اختبار كاي - تربيع (χ^2) لاختبار ما إذا كان هناك أى ارتباط بين نوع الماكينة والتعرض للعيوب عند 0.05 مستوى معنوى .

(حدم م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

١٧ - نفذت تجربة لمقارنة سهولة استخدام ثلاث ماكينات حاسبة متماثلة X و Y و Z نفذ العامل عدداً من العمليات الحسابية غير الشائعة عند سرعة مرتفعة على الماكينة X وكرر الحسابات بعد ذلك على الماكينات Y و Z . وكان عدد أخطاء العامل فى الحسابات 20 عند العمل على X ، و 12 عند العمل على Y ، و 7 عند العمل على Z .

المطلوب :

(١) إذا كانت الأخطاء فى الحسابات متماثلة التوزيع على الماكينات الثلاث ، فما هى القيمة المتوقعة

للنتائج ؟

(٢) لأى فرض تستخدم اختبار معنوية الاحصاء هنا ؟

(٣) استخدم اختبار كاي - تربيع ، وأذكر النتائج بوضوح .

(٤) اذكر نقد هام على الطريقة التى تعمل بها التجربة . وكيف يؤثر هذا على شرح النتائج التى تم الحصول

عليها فى الجزء (٣)

(حدم م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٧)

١٧ - ٣ مصنعان يستخدمان مواد مشتركة من نفس الشخص المورد ، وخاضعة إلى حد ما لمواصفات متفق عليها للإنتاج خلال فترة معينة ، ومصنفة فى ثلاث درجات من حيث النوع كما يلي :

درجات النوع				المجموع
A	B	C		
النتائج بالأطنان				
X	42	13	33	88
Y	20	8	25	53
المجموع	62	21	58	141

(أ) هل أرقام الإنتاج تعطى فروقاً معنوية عند مستوى 5% ؟

(ب) ما هو الفرض الذى تختبره ؟

(حدم م أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧١)

الفصل الثامن عشر

تطبيقات على المعاينة

١-١٨ مقدمة للضبط الاحصائي للجودة

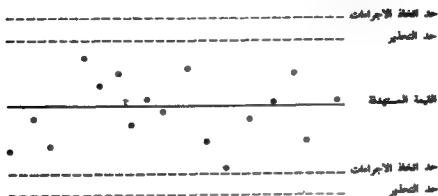
عند الانتاج بالجملة على خط انتاج يكون هناك - حتما - بعض التفاوت في مواصفاتها وقد يحدث بالعملية الانتاجية التي ظلت مضبوطة فترة من الزمن عيب يؤدي إلى تغير جوهري في تلك المواصفات . ودور مفتش ضبط الجودة هو أن يكشف ذلك التغير بأسرع ما يمكن حتى يتسنى اصلاح العيب .

ويحتاج هذا الفصل إلى معلومات في الاحصاء أكثر من المبادئ الواردة في الفصلين الرابع عشر ، والخامس عشر . وستتناول في هذا الجزء ثلاثة جوانب لضبط الجودة : أولا سنبحث مراقبة مواصفات وحدات الانتاج . ثم سنبحث معاينة مجموعات من المنتجات . وأخيراً سنتناول الحالة التي تصنف فيها المنتجات إلى معيبة (غير مقبولة) أو غير معيبة (مقبولة) .

(أ) غرائط ضبط الملاحظات

عند انتاج عدد كبير من المنتجات نتوقع أن تتفاوت مواصفاتها تفاوتاً ضئيلاً . وإذا كان توزيع تلك المواصفات معروفاً فإننا نستطيع أن نحسب نسبة المنتجات التي تقع أبعادها داخل حدود الضبط . وتوضح حدود الضبط بياناً على خريطة ضبط كذلك الميينة في شكل ١٨ - ١ . والغرض من خريطة ضبط الجودة هو مساعدة مفتش الجودة على اكتشاف ما إذا كانت الملاحظات تعطي وحدات من نفس المجتمع ، أو ما إذا كان المجتمع قد تغير بطريقة ما .

وعلى خريطة الضبط بشكل (١٨ - ١) رسماً حدين للتحذير ، وحدين لاتخاذ الاجراءات . وقد رسم حدا التحذير بحيث نتوقع أن تقع 95% من الملاحظات بينهما إذا كانت العملية الانتاجية مضبوطة . فإذا وقعت إحدى النقط خارج هذين الحدين يجب على المفتش أن يجري ملاحظة أخرى فوراً . فإذا وقعت ملاحظتان متتاليتان خارج الحدين فإن هذا يعني عن يقين تقريباً وجود عيب في العملية الانتاجية . ونتوقع أن تقع كل الملاحظات تقريباً داخل حدى اتخاذ الاجراءات . والنسبة المثوية التي يجب من وجهة نظرنا أن تقع بين هذين الحدين هي 99.8% فإذا كانت العملية الانتاجية مضبوطة ، فلن يخرج عن هذين الحدين أكثر من ملاحظة كل 500 ملاحظة ولذلك يجب ايقاف العملية الانتاجية فوراً إذا وقعت ملاحظة خارجهما .



شكل ١٨-١

لنأخذ المثال التالي :

مثال ١٨-١ : مصنع كيماوي به الإنتاج التالي كل ساعة على مدى عشر ساعات .

الساعة الإنتاج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	140	131	142	121	134	145	131	148	132	136

وقد قرر مدير المصنع أن هذا المعدل المتوسط للإنتاج هو المطلوب . وقد طلب منك أن تحسب من هذه البيانات مدى الضبط العلوي والسفلي اللذين يمكن استخدامهما على خريطة لضبط الجودة براد انشاؤها . ويجب أن يكون الحدان بحيث يغطيان درجة مخاطرة واحد في المئتين للتحذير من التغيرات الممكنة في العملية الانتاجية .

احسب :

(أ) الوسط والتباين والانحراف المعياري للأرقام العشرة للإنتاج .

(ب) الحد العلوي والسفلي للضبط للخريطة .

(ج) ارسم الخريطة وبين عليها مدى الضبط مع أمثلة للملاحظات المسجلة كل ساعة .

(م م أ - جزء ١ - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (140 + 131 + \dots + 136) = 136. \quad \text{(أ) وسط العينة}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2 = 57.2 \quad \text{تباين العينة}$$

$$s = 7.56 \quad \text{الانحراف المعياري للعينة}$$

(ب) ولما كانت s لا تعتبر مقداراً غير متحاز يمثل المجتمع يلزم حساب

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s = 7.97$$

ولما كان حجم العينة صغيراً وقيمة المتغير σ غير معروفة ، فإن حدى الضبط يكونان على الصورة .

$$\bar{x} \pm t \bar{s}$$

حيث t هي القيمة المناسبة من توزيع t بدرجات حرية $9 = 1 - n$ ومن الجدول نجد أن 95% من التوزيع يقع بين الحدين $2.26 -$ ، $2.26 +$ وهكذا فإن حدى التحدير هما

$$136 + (2.26 \times 7.97) \text{ إلى } 136 - (2.26 \times 7.97)$$

أي

$$154.01 \text{ إلى } 117.99$$

وهكذا نستنتج أنه لو تم انتاج من 118 إلى 154 وحدة في الساعة (شاملة هذين الرقمين) فإننا نستطيع أن نقول في اطمئنان أن العملية الانتاجية مضبوطة . أما إذا كانت إحدى القيم خارج هذا المدى ، فإن هناك احتمالاً قوياً في وجود عيب في النظام .

(ج) بين شكل ١٨-٢ خريطة ضبط الجودة . ولنفرض أنه بعد مدة حصلنا على مستويات الانتاج التالية :

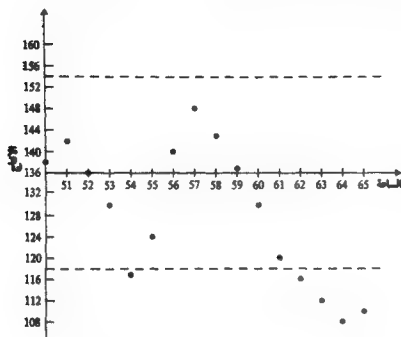
الساعة	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
الانتاج	138	142	136	130	117	124	140	148	143	137	130	120	116	112

وبين شكل ١٨-٢ مستويات الانتاج المذكورة . ومع أن إحدى القيم تقع أسفل حد الضبط عند الساعة 54 إلا أنه محتمل أن يكون ذلك ناتجاً عن التغير العشوائي العادي الموجود بالعملية الانتاجية . ولا يجب في هذه المرحلة إيقاف الانتاج . ومع ذلك يجب إيقافها حتماً بعد الساعة 63 حيث أن هناك ملاحظتين متتاليتين أقل من الحد الأدنى للتحذير .

(ب) مخرائط ضبط متوسطات العينات

حتى الآن تناولنا حالات تؤخذ فيها ملاحظة واحدة على فترات زمنية منتظمة . ويمكن استخدام المخرائط بطريقة مماثلة عندما تؤخذ عينات صغيرة بانتظام وتكون هذه الطريقة مفيدة بوجه خاص عندما تكون لدينا عملية انتاجية تنتج أعداداً كبيرة من المنتجات . وفي هذه الحالة يكون من السهل سحب عينات صغيرة نسبياً في عمليات تفتيش لضبط جودة السلع بصفة عامة .

ولنفرض أننا نسحب عينات تتكون من n من القياسات على فترات منتظمة . فإذا كانت القيم مأخوذة من مجتمع توزيعه طبيعي تقريباً ووسط المجتمع هو μ وانحرافه المعياري هو σ فإنه عندما تكون العملية مضبوطة ، فإن وسط العينات سيقع في 95% من الحالات بين الحدين $\mu - 1.96 \sigma/\sqrt{n}$ و $\mu + 1.96 \sigma/\sqrt{n}$ ونفس الطريقة فإن 99.8% من أوساط العينات تقع بين الحدين $\mu - 3.09 \sigma/\sqrt{n}$ و $\mu + 3.09 \sigma/\sqrt{n}$.



شكل ١٨-٢

مثال ١٨-١-٢ : أظهرت الخبرة أنه في الظروف العادية ، فإن العملية الانتاجية تعطي وحدات قطرها المتوسط 3.00 بوصة وانحرافها المعياري 0.01 بوصة أوجد الخطأ المعياري لوسط عينات مكونة من أربع وحدات ، وأحسب الحدود التي تقع بينها أوساط العينات :

(أ) لـ 95% من العينات .

(ب) لكل العينات عملياً .

ارسم خريطة ضبط الجودة لأوساط العينات المكونة من 4 وحدات مبنياً بالحدود الداخلية والخارجية . وقع الأوساط المعطاة في الجدول التالي على الخريطة ، وعلق على الموقف الذي تظهره الخريطة .

وسط عينات من أربع عينات ملحوظة كل عشر دقائق					
الوزن (ساعة)	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40
القطر المتوسط (بوصة)	3.003	3.004	2.995	3.001	2.992
الوزن (ساعة)	3.50	4.00	4.10	4.20	4.30
القطر المتوسط (بوصة)	2.996	3.001	3.003	3.006	3.011
الوزن (ساعة)	4.40	4.50	5.00	5.10	5.20
القطر المتوسط (بوصة)	3.005	2.995	2.997	2.993	2.990
الوزن (ساعة)	5.30	5.40	5.50	6.00	6.10
القطر المتوسط (بوصة)	2.991	2.992	2.990	2.986	2.984

(ج-م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

٢٠ - الرياضيات والاحصاء

$$\mu = 3.00, \sigma = 0.01, n = 4$$

الاجابة

وبالتالى :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

$$\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.00 - 1.96 \times 0.005 = 2.9902 \quad (١)$$

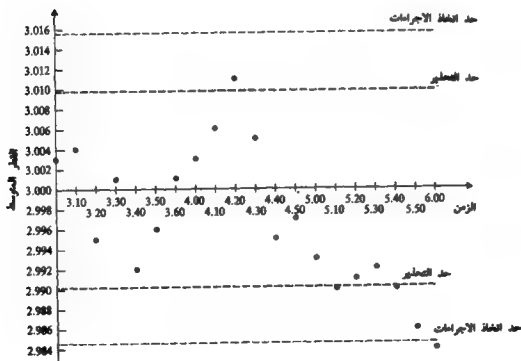
$$\mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.0098$$

وبالتماثل

وقد رسم الحدان 2.9902 و 3.0098 على شكل (١٨ - ٣)

(ب) حدا اتخاذ الاجراءات هما $\mu - 3.09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $\mu + 3.09 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أو بمعنى آخر 2.8455 و 3.1545 .

ونرى أنه يمكن اعتبار أن العملية ظلت مضبوطة حتى الساعة 5.10 وبعد هذا الزمن توجد أربع ملاحظات كلها قريبة جداً من حد الانذار السفلى . ويمكن تجاهل هذه الملاحظات لأن الفرق بينها وبين μ يمكن أن يكون سببه الصدفة . أما الملاحظتان الأخيرتان فتؤكدان الشك في أن عيباً قد ظهر ، ويجب إيقاف العملية فوراً .



شكل ١٨ - ٣

وعملياً كثيراً ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع غير معروف . وهناك امكانية أخذ عدد كبير من المنتجات من العملية وحساب \bar{x} لتقدير μ . وبعد ذلك تستخدم العوازل 1.96 و 3.09 كما في الأخطاء السابقة . أما إذا كان لدينا قدر بسيط نسبياً من البيانات لتقدير σ فنحن نستخدم نفس الطريقة ولكننا نستبدل بالعاملين 1.96 و 3.09 القيم المناسبة من توزيع t ولكن ما يحدث كثيراً عند التعامل مع العينات الصغيرة هو حساب المدى w لعدد من العينات الصغيرة ، ثم استخدام متوسط المدى \bar{w} كمقياس للتباين في البيانات . وكما ذكرنا في البند ٨ - ٧ فإن المدى للعينات الصغيرة مرتبط بالانحراف المعياري بعلاقة بسيطة وبذلك فإن \bar{w} مرتبط بـ σ . وهناك جداول منشورة تعطي العوامل التي يجب ضربها في w للحصول على حدود التحليل ، واتخاذ الإجراءات للعينات التي يبلغ حجمها n حتى 12 .

(جـ) خريطة ضبط المعينات

حتى الآن بحثنا خرائط الضبط وتطبيقاتها على القياسات المستمرة . والآن سنتناول الحالات التي يكون فيها عملياً أن تصنف الأجزاء باعتبارها مرضية أو معيبة . ويكون هذا مناسباً بصفة خاصة عند فحص منتج نهائي لتقرير ما إذا كان مطابقاً للمواصفات .

ولكن نكتشف ما إذا كانت العملية مضبوطة نأخذ عينات على فترات منتظمة ونحسب نسبة المعينات في العينات . وترسم هذه النسبة على خريطة لضبط الجودة تحسب حدود التحليل واتخاذ الإجراءات لها على أسس توزيع ذات الحدين له البارامتران n (حجم العينة) و p (نسبة المنتجات المعيبة عندما تكون العملية مستقرة) . وقد رأينا في الفصول السابقة أن حسابات توزيع ذات الحدين تكون متعبة عندما تكون n كبيرة ولذلك يمكن استخدام توزيع بواسون ، أو التوزيع الطبيعي كتقريب له عندما يكون ذلك مناسباً .

مثال ١٨ - ١ - ٣ :

(أ) في عينة كبيرة مأخوذة من الإنتاج وجدت 42 وحدة معيبة من مجموع 1000 وحدة . وقد تقرر سحب عينات للضبط حجمها 200 وحدة على فترات معينة .

احسب الوسط المتوقع وحدا 95% و 99% لخريطة الضبط .

(ب) بدأ استخدام الخريطة بناء على الأرقام المحسوبة في الجزء (أ) أعلاه . وبعد مدة سجلت 15 عينة وجدت بينها المعينات التالية :

رقم العينة	عدد المعينات
1	8
2	11
3	9
4	6
5	12
6	8
7	13
8	11
9	14
10	15
11	18
12	10
13	8
14	12
15	7

ارسم الخريطة مبنياً على الحدين العلويين لاتخاذ الاجراءات وللتحذير ، ثم وقع عليها النتائج المذكورة أعلاه .
 ماذا يبدو أنه حدث لسبب التغير المفاجيء بين العينات أرقام 11 و 12 ؟
 (م م أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٣)

الاجابة :

(أ) من العينة الكبيرة نستنتج أن $p = 0.042$ ولما كانت $np = 200 \times 0.042 > 5$ نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذات الحدين .

وبالتالى يكون حدا التحذير للنسب الممثلة

$$\bar{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad \text{و} \quad \bar{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

وهذان الحدان يساويان

$$0.0698 \quad \text{و} \quad 0.0142$$

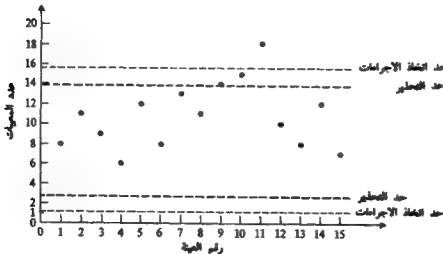
ومنها نستنتج أنه عندما تكون العملية مضبوطة فإن 95% من العينات سيكون بها من 3 إلى 13 معيبة (شاملة هذين الرقمين) بين وحدات العينة الـ 200
 أما حدا اتخاذ الاجراءات للنسب الممثلة فيهما

$$\bar{p} + 2.58 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad \text{و} \quad \bar{p} - 2.58 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

أى

$$0.0786 \quad \text{و} \quad 0.0054$$

وهكذا فمنعنا تكون العملية الانتاجية مستقرة يكون عدد المبيعات من 2 إلى 15 (شاملا هذين الرقمين) 99% من المرات .



شكل ١٨ - ٤

(ب) بين شكل (١٨ - ٤) حدود الأتذار ، واتخاذ الاجراءات . لاحظ أنه في هذا المثال اتخذ حدة اتخاذ الاجراءات على أساس نسبة 99% وليس 99.8% التي استخدمناها سابقاً . ويبدو واضحاً أنه حدث تدخل في العملية بين العيّتين 11 و 12 . وقد وجد خطأ في العملية عند العينة 11 . وقد تم تصحيح الخطأ وبالتالي تحسنت النتائج التالية .

تعرين ١٨ - ١ - ١ : تم ضبط ماكينة بحيث تنتج رولمان بلى قطره المتوسط 17.5 مم وانحرافه المعياري 0.06 مم وللتأكد من أن الماكينة تحافظ على المواصفات المطلوبة تؤخذ عينة مكونة من تسع وحدات كل ساعة ، وبحسب القطر المتوسط للمينة .

(أ) احسب حد الثقة المقابل لنسبة 95% للمواصفات المذكورة أعلاه .

(ب) استخدم الحدود المحسوبة في (أ) أعلاه لرسم خريطة القبط ووقع عليها المتوسطات التالية للمينات .

رقم العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الوسط (مم)	17.47	17.50	17.49	17.52	17.54	17.57	17.51	17.52	17.50

(ج) علق على النتائج ، وعلاقتها بالحدود التي تم حسابها .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

تعرين ١٨ - ١ - ٢ : تسحب من على خط الإنتاج مجموعات مكونة من 100 وحدة على فترات زمنية ثابتة وتختبر . وقد وجد عدد الوحدات المعيبة في كل مجموعة كما يلي :

4	3	2	0	7	5
2	4	1	3	4	6

(أ) احسب متوسط نسبة المعيبات .

(ب) ارسـم خريطة لضبط الجودة للمينات المكونة من 200 وحدة بحيث يكون الحد الداخلي مساوياً للمتوسط زائد انحراف معياري واحد ، والحد الخارجي مساوياً للمتوسط زائد ضعف الانحراف المعياري .

(ج) هل يمكن استخدام هذه الخريطة لمجموعات مكونة من 50 وحدة ؟ إذا كانت الاجابة بلا فما السبب ؟ (م م ت أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٦٩)

١٨ - ٢ دور المعاينة في المراجعة

الدور الأساسي للمراجع الخارجي هو التحقق من أن حسابات الشركة صحيحة وطبقاً للقانون . وفي بداية عمليات المراجعة لم يكن مستغرباً أن يقوم المراجع بفحص جميع المعاملات المالية . ولكن هذا أصبح نادرًا اليوم بسبب العدد الضخم من المعاملات المالية التي تتم في كثير من الشركات الكبرى . وعادة يتم التغلب على هذه المشكلة بفحص جزء صغير من الحسابات واستخدام المعلومات الناتجة للوصول إلى صورة عامة عن مجتمع الحسابات كله . ويعتبر هذا بالطبع معاينة .

ويمكس المجالات الأخرى التي تستخدم فيها المعاينة ، فإن استخدام المعاينة التقليدية منتشر في المحاسبة . ومع أن هذه الظاهرة تناقصت في الأعوام العشرين ، أو الثلاثين الماضية إلا أنه يبدو أن شركات المحاسبة الكبيرة جداً هي

فقط التي تستخدم الطرق الاحصائية للمعينة . وهناك مبيان لذلك : الأول أنه في المراحل الأولى لتطور الاحصاء لم يكن هناك إلا القليل من الأبحاث في مجال المال والاقتصاد . ومع أن هذا لم يعد هو الحال الآن إلا أن غالبية الأبحاث الحديثة غير موثقة بسبب قيمتها المالية لشركات المحاسبة . والسبب الثاني لنقص الطرق الاحصائية للمعينة في المحاسبة هو ضعف الخلفية الاحصائية لكثير من قدامى المحاسبين . ولن يصبح هذا مشكلة في المستقبل لأن معظم المحاسبين الآن يدرسون الاحصاء في فترة تأهيلهم .

ومزايا المعينة الاحصائية على المعينة التقديرية هي نفسها المذكورة في البند ٦-٧ باختصار وهي أنها تسمح بحساب أفضل حجم للعينة لتحقيق الدقة المطلوبة . أوبالعكس تسمح بتحديد الدقة إذا عرفنا حجم العينة . وهذا مهم بالطبع إذا كانت شركة المحاسبة قد تعرض للمحاكمة إذ ثبت افعالها ، أو إذا ثبت أن مراجعتها لم تكن كافية . فإذا استطاعت الشركة أن تثبت أن مراجعتها تمت بطريقة لها أساس علمي معترف به ، فهذا يجعل موقفها أكثر أماناً مما لو كانت الطريقة المستخدمة شخصية محضة مهما كانت درجة خبرة المراجع .

وستتوالى في هذا الجزء خمسة تطبيقات للطرق الاحصائية للمعينة على مراجعة الحسابات . وسندرس كلا من تلك الأساليب على حدة .

(١) تقدير المتغيرات بالمعينة

تستخدم هنا النظريات المشروحة بالفصل الخامس عشر لتقدير القيمة الكلية لمجتمع من الحسابات على أساس عينة منها . ومن الواضح أننا نستطيع استخدام النتيجة القائلة بأن

$$\text{تقدير قيمة المجتمع} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} \times \text{قيمة العينة}$$

وفذلك عندما يتم اختيار العينة عشوائياً . ومن الأمثلة التقليدية لذلك في مجال المال والاقتصاد تقدير ما يلي :

١ - قيمة المخزون

٢ - قيمة الأصول

٣ - قيمة الأخطاء

٤ - قيمة المخاطر

ولنأخذ مثالا لحساب حجم العينة لتحقيق درجة معينة للدقة .

مثال ١٨ - ٢ - ١ : معلوم من الخبرة السابقة أن الانحراف المعياري لمجتمع يتكون من 20 000 مفردة هو £250 = σ والمطلوب تقدير هذه المفردات الـ 20 000 ولكن نظراً لضيق الوقت نقرر فحص عينة عشوائية منها فقط . والمطلوب أن يكون التقدير دقيقاً لأقرب مليون جنيه بدرجة ثقة 99% . ما هو حجم العينة التي يلزم أخذها ؟

الاجابة : المطلوب أن يكون الاحتمال

$$P(-1\ 000\ 000 < 20\ 000(\bar{x} - \mu) < 1\ 000\ 000) > 0.99$$

أي أن

$$P(-50 < \bar{x} - \mu < 50) > 0.99$$

$$2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 50$$

وبالتالي فإن

$$\sqrt{n} > \frac{2.58 \times 250}{50} = 12.9$$

$$n > 12.9^2 = 166.4$$

أي أن أصغر حجم للعينة هو 167 مفردة .

(ب) تقدير الصفات بالمعاينة

في هذه الحالة مطلوب تقدير عدد ، أو نسبة المفردات في المجتمع التي تتمتع بصفة معينة . وفي مراجعة الحسابات يكون التطبيق المعتاد لهذه الطريقة هو لتقدير عدد الأخطاء في مجموعة من الحسابات . وهناك تطبيقات أخرى منها :

١ - نسبة الديون التي تأخر تسليدها ستة شهور .

٢ - عدد الموظفين الذين يحصلون على أجر إضافي في أحد الأسابيع .
والنتيجة التالية مفيدة في هذا المجال :

$$\text{تقدير عدد المفردات في المجتمع} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} \times \text{عدد المفردات في العينة التي تتمتع بالصفة}$$

ويستخدم النظريات الواردة بالفصل الخامس عشر يمكننا حساب درجة ثقة تقريبية لتقديرنا .

مثال ١٨ - ٢ - ٢ : يريد مراجع حسابات أن يقدّر عدد العروض التي يوجد بها خطأ صغير معين ضمن عدد إجمالي قدره $N = 50000$ عرض في تجارة الشهر الماضي . وقد أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 250$ من العروض ، فاتفّح أن بها 10 عروض بها خطأ .

احسب حدود ثقة 95% تقريبية لهذا المجتمع .

الاجابة : حدود الثقة 95% هي

$$N \left(\hat{p} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right) = 50000 \left(0.04 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.04 \times 0.96}{250}} \right)$$

$$= 785 \text{ و } 3215$$

(ج) الاكتشاف بالمعاينة

يهتم الاكتشاف بالمعاينة بفحص مجتمع لمحاولة الكشف عن حالة واحدة من خطأ جسيم . ومن المواقف التي يمكن أن تندرج تحت هذا العنوان :

١ - اختلاس النقود .

٢ - النش .

٣ - انهيار الرقابة الداخلية .

وعندما يتم اكتشاف الخطأ توقف المعاينة فوراً ، ويقدم تقرير عن الخطأ .

ويمكن في الاكتشاف بالمعانة اعتبار أن احتمال مثل هذا الخطأ ضئيل جداً . وهذا يسمح لنا بإجراء الحسابات ببساطة باستخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع الحدين (انظر الجزء ١٤ - ٤) .

مثال ١٨ - ٢ - ٣ : لنفرض أن لدينا مجتمعاً كبيراً معدل الخطأ به ١/٢% . أوجد احتمال العثور على خطأ إذا أخذت عينة عشوائية حجمها :

$$n = 40 - ١ \quad n = 100 - ٢ \quad n = 600 - ٣$$

الاجابة :

$$١ - n = 40 , p = 0.005 , m = np = 0.2 \text{ نوجد } P(r=0) = e^{-m} = e^{-0.2} = 0.82 = \text{احتمال عدم وجود خطأ}$$

أي أن احتمال العثور على خطأ هو 18% فقط .

$$٢ - n = 100 , p = 0.005 , m = 0.5 , e^{-0.5} = 0.61 = \text{احتمال عدم وجود خطأ}$$

أي أن احتمال العثور على خطأ هو 39% .

$$٣ - n = 600 , p = 0.005 , m = 3 , e^{-3} = 0.05 = \text{احتمال عدم وجود خطأ}$$

أي أن احتمال العثور على خطأ هو 95% .

(٥) القبول بالمعانة

تستخدم الشركات مراجعين داخليين لمراقبة نظام الحسابات لديها ، والتأكد من أنه يعمل جيداً ولمساعدة المراجع تؤخذ عينات من الحسابات على فترات منتظمة لمراجعتها ، والتأكد من أن معدل الخطأ بها لا يزيد على حد معين . ويسمى هذا بالقبول بالمعانة وهو مجرد تطبيق لضبط الجودة على المحاسبة . وفي القبول بالمعانة تهتمنا الأخطاء غير الجسيمة وليس حالات الغش ومن أمثلة تلك الأخطاء :

- ١ - خطأ في التاريخ .
- ٢ - خطأ في الجمع .
- ٣ - عدم ختم الوثيقة .
- ٤ - عدم توقيع الوثيقة من الشخص المسئول .

وصفة عامة فإن القبول بالمعانة لا يهم المراجع الخارجي الذي يهتم فقط بأخذ عينة واحدة .

مثال ١٨ - ٢ - ٤ : يقوم مراجع داخلي لشركة كبيرة بمراجعة عينة من 500 من المعاملات المالية كل أسبوع للتأكد من أن نظام المحاسبة يسير على ما يرام . ومن المتوقع حدوث عدد من الأخطاء البسيطة التي لا يمكن القضاء عليها تماماً . ولكن الشركة تعتقد أنه يجب إبقاء معدل الخطأ أقل من 2% . ما عدد الأخطاء التي يجب أن تظهر في العينة حتى يتأكد المراجع من أنه تم تجاوز المعدل المسموح به للخطأ (بدرجة ثقة 95%) ؟

الاجابة إذا كان معدل الخطأ هو 2% فإن هناك احتمالاً قدره 0.05 فقط في أن يتم العثور على أكثر من

$$(500 \times 0.02) + 1.645 \sqrt{500 \times 0.02 \times 0.98} = 15.15$$

من الأخطاء (باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذات الحدين) . فلذا وجد المراجع 16 خطأ ، أو أكثر يمكنه أن يتأكد بدرجة معقولة من تجاوز معدل الخطأ .

(هـ) المعاينة حسب القيمة التقديرية

هذه الطريقة من الطرق الحديثة للمعاينة ، وهي مفيدة لتقدير قيمة الخطأ في المجتمع من عينة من المفردات باستخدام النتيجة .

$$\text{تقدير القيمة الاجمالية} = \frac{\text{القيمة الكلية للمجتمع}}{\text{القيمة الكلية للعينة}} \times \text{القيمة الاجمالية للأخطاء في العينة .}$$

ومن هنا نرى أنه يمكن الحصول على تقدير أدق للقيمة الاجمالية للأخطاء إذا كانت قيم العينة كبيرة مما إذا كانت صغيرة . ويمكن تحقيق ذلك بالتقسيم إلى طبقات طبقاً لأحد معايير القيمة ، ثم باختيار نسبة عالية من قيم العينة الكبيرة . وفي المعاينة حسب القيمة التقديرية نحقق ذلك باختيار مفردات يتناسب احتمالها مع قيمتها . وهكذا فإن مفردة قيمتها £5 لها خمسة أضعاف الفرصة أن تؤخذ ضمن العينة من مفردة قيمتها £1 . وسأخذ مثالا بسيطاً لتوضيح هذه الطريقة .

مثال ١٨ - ٢ - ٥ : لدينا مجتمع يتكون من 15 مفردة . والمطلوب اختيار عينة من 5 مفردات بحيث يتناسب احتمال الاختيار مع القيمة . ولها يلي قيم المجتمع :

£31 £5 £18 £15 £8 £40 £2 £20 £3 £38 £24 £5 £1 £30 £10

الاجابة : في البداية نحسب سلسلة من المجاميع التراكمية وهنا يكون لدينا £10 و £40 و £41 و £46 و £70 و £108 و £111 و £131 و £133 و £173 و £181 و £196 و £214 و £219 و £250 . وقد حصلنا على هذه القيم بجمع القيم الواردة في المجتمع تراكمياً ، وعلى سبيل المثال $40 = 30 + 10$ و $41 = 40 + 1$.

ولما كان الاجمالي هو £250 نختار خمسة أرقام عشوائية (من جداول الأرقام العشوائية) بين 001 و 250 ولنفرض أن هذه الأرقام هي ،

089, 140, 060, 249, 195

ولنأخذ الرقم 089 .

ولما كان مجموع القيم الخمس الأولى في المجتمع أقل من £89 نأخذ أيضاً القيمة رقم 6 (وهي £38) في العينة . وبفعل الطريقة

- 140 تقابل القيمة رقم 10 (وهي £40)
 60 تقابل القيمة رقم 5 (وهي £24)
 249 تقابل القيمة رقم 15 (وهي £31)
 195 تقابل القيمة رقم 12 (وهي £15)

(وهناك طريقة أفضل لاختيار الأرقام العشوائية وهي باستعمال المعاينة المنتظمة ، أى باختيار أى رقم بين 0 و 50 وليكن 39 ثم استخدام الأرقام العشوائية 39 و 89 و 139 و 189 و 239 لاختيار المفردات) .

وهذه هي الأساليب الخمسة للمعاينة الاحصائية التى تفيد المراجعين . ومازال عدد من المراجعين يوجهون النقد لاستخدام المعاينة الاحصائية لسببين ، والأول انهم يعتقدون أن عملية الاختيار العشوائى فى حد ذاتها تستهلك وقتاً طويلاً وهي غير مريحة . ويمكن الرد على ذلك بأن معظم الوثائق المالية تحفظ الآن على الكمبيوتر ، ومن السهل بمكان برمجة الكمبيوتر لحظى البيانات الخاصة بالعينة عشوائياً . والنقد الثانى الذى يوجه هو اعتقادهم بأن المراجع المتمرس يستطيع أن يختار عينة أفضل من العينة العشوائية . ويرد الاحصائيون على ذلك بأن الخبرة يجب أن تستخدم لتقسيم المجتمع إلى طبقات ، وأن الحاجة إلى العشوائية لا تظهر إلا فى المرحلة الأخيرة من عملية اختيار العينة .

وفى اعتقادنا أن تطور أساليب المعاينة الاحصائية فى مجال المال والاقتصاد سيستمر فى التزايد . ومن واجب كل المحاسبين الذين يصبون إلى إتقان المهنة أن يتعرفوا على تلك الأساليب .

الملحق الأول

حلول التمارين

الفصل الثاني

$$a = -3 \quad ١-٢-٣$$

$$y = -2, x = 1.5 \quad ١-٢-٢$$

$$Y \text{ للبيكة } 20, X \text{ للبيكة } 10 \quad ٢-٢-٢$$

$$v = 2, q = 1, p = 1 \quad ٣-٢-٢$$

$$x = 3 \quad ١-٣-٢$$

$$x = 2.75 \text{ و } x = 0.5 \quad ٢-٣-٢$$

$$x = -1.099, x = 0.56 \quad ٣-٣-٢$$

$$12, 7 \quad ٤-٣-٢$$

$$n = 0.25 \quad ١-٤-٢$$

$$2.58 \text{ (ب)}, 5.66 \text{ (أ)} \quad ٧-٤-٢$$

تمارين

$$z = -0.2, y = 0.125, x = 0.5 \quad ١-٢$$

$$\text{التكلفة} = 10\,000 + 7.5x \quad ٢-٢ \text{ (أ)}$$

$$\text{الإيراد} = 60x - \frac{x^2}{20}$$

$$\text{الربح} = -\frac{x^2}{20} + 52.5x - 10\,000$$

$$\text{أقصى ربح} = £3781 \quad \text{(ج)}$$

$$\text{عدد الوحدات} = 525$$

$$\text{سعر البيع} = £33.75$$

$$z = -2.317, y = 2.317, x = -1.738 \text{ إما } \quad ٣-٢$$

$$\text{أو } z = 1.151, y = -1.151, x = 0.863 \quad ٢$$

الفصل الثالث

10	١-١-٣
1210	٢-١-٣
828	٣-١-٣
£1650	٤-١-٣
-153.8	١-٢-٣
12285	٢-٢-٣
422/ 243	٣-٢-٣
45 ، 75	٤-٢-٣
11	٥-٢-٣
8.5%	١-٣-٣
11½ من السنين	٢-٣-٣
£1972	٣-٣-٣
5.7 من السنين	٤-٣-٣
£2415 (٢) 32.55% (١)	٥-٣-٣
£4665 (ب) 5.3 من السنين (ج)	٦-٣-٣
74½ بنس (٢) 75 بنس (١)	١-٤-٣
£340 855	٢-٤-٣
£138 630	١-٥-٣
12.5%	٢-٥-٣

تمارين

£407.38	١-٣ الطريقة (١) التي تكلف £405.39 ، الطريقة (٢) وتكاليفها
£7362	٢-٣
£27 423 (ب) 5.0% (أ)	٣-٣

الفصل الرابع

$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	١-٢-٤
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	٢-٢-٤
$\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$	٣-٢-٤

$$\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 18 & 14 \end{pmatrix} \quad ٤-٢-٤$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 12 & 29 \\ 15 & 37 \end{pmatrix} \quad ٥-٢-٤$$

$$Y \perp X \text{ (ب) } ١-٣-٤$$

$$£5263 \quad ١-٤-٤$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ٢-٤-٤$$

$$x_1 = -25/4, x_2 = 5, x_3 = -3/4$$

$$B \text{ لانتاج } £442.10 \text{ m و } A \text{ لانتاج } £463.16 \text{ m} \quad ١-٥-٤$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6000 \\ 10000 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ٢-٥-٤$$

التكلفة النهائية التي توزع على اقسام الانتاج هي

$$P_2 \text{ لـ } £27\,734 \text{ و } P_1 \text{ لـ } £15\,266$$

تمارين

$$Ax=b \quad (١) \quad ١-٤$$

$$A \text{ (٢) هو مصفوفة من رتبة } m \times n$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 6 \\ 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (١) \quad ٢-٤$$

$$C = 30 + 54 + 12 = 96 \quad (٢)$$

$$R \text{ من } 442.84, P \text{ من } 369.83, Q \text{ من } 492.35$$

$$\begin{pmatrix} 40 & 70 & 7 \\ 22 & 35 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 525 \\ 30 \end{pmatrix} \quad (١) \quad ٤-٤$$

(ب) أرمز للكميات المطلوبة من النواتج الأربعة بالرموز q_1, q_2, q_3, q_4 وسعر الوحدة المناظرة بالرموز P_1, P_2, P_3, P_4 على التوالي :

المطلوب هو

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

الفصل الخامس

$$17 = \frac{dy}{dx} = 10x - 3 \quad (٧) \quad 0 = \frac{dy}{dx} = 4x^3 \quad (١) \quad ١-١-٥$$

$$0 = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (٤) \quad -2 = \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^2} \quad (٣)$$

١-٢-٥ القيمة العظمى تساوى 15 عندما $x = -1$ ، القيمة الصغرى تساوى -12 عندما $x = 2$

١-٣-٥ (١) الربح الأكبر يساوى 235 عندما $x = 14$
16.8 (٧)

تمارين

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^2} + 2x \quad (ب) \quad \frac{dy}{dx} = 9x^2 + 4x + 1 \quad (أ) \quad ١-٥$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^3 - 4 \quad (جـ)$$

٢-٥ تكون صغرى ، تكون عظمى $(-5, 33\frac{1}{3})$ تكون عظمى

$$MP(x) = 50 - 4x \quad (جـ) \quad MC(x) = 4x \quad (ب) \quad MR(x) = 50 \quad (أ) \quad ٣-٥$$

$$(و) من 5000 الى 12000 وحدة \quad 112.50 \quad (هـ) \quad x = 12.5 \quad (د)$$

$$q = 22 \quad (جـ) \quad q = 4 \quad (ب) \quad q = 20 \quad (أ) \quad ٤-٥$$

الفصل الثامن

١-٢-٨ الوزن المتوسط يساوى 4.375 من الأطنان

٢-٢-٨ الزمن المتوسط يساوى 5 ساعات و 40 دقيقة

١-٣-٨ الوسيط يساوى £54.83

١-٤-٨ المتوال يساوى 17.2 طالب

١-٦-٨ 2

٢-٦-٨ 2

٣-٦-٨ £13.14

١-٧-٨ 1.67

٢-٧-٨ £10.37

٣-٧-٨ £9.77

١-٨-٨ -0.6

٢-٨-٨ -0.088

تمارين

- ٨-١ (ب) (١) الوسط يساوى 7.26 من الساعات
 (٢) الوسط يساوى 7.4 من الساعات
 ٨-٢ (ب) (١) الوسط يساوى £84
 الوسط يساوى £86.47
 المتوال يساوى £76.90
 ٨-٣ (أ) (١) 64 (٢) 34 (٣) 36 (٤) 17 (٥) 51 (٦) 17 (٧) 17.2 (٨) 19.63
 ٨-٤ (أ) (١) 29.5 (٢) 9.5

الفصل التاسع

- ٩-٢-١ (أ) $y = 7.489 + 1.213x$
 ٩-٢-٢ $y = -1.435 + 1.759x$
 ٩-٣-١ (أ) $y = 182\ 144 + 8086.41x$
 (ب) 246 835 ألف مليون وات من الساعات
 (1969 أدخلت كسنة البداية أى عند 0)
 ٩-٤-١ $r = 0.879$
 ٩-٥-١ (٢) 0.65

تمارين

- ٩-١-١ $y = 21\ 250 + 0.962x$
 عندما $y = £46\ 250$ $x = 26\ 000$
 عندما $y = £68\ 125$ $x = 48\ 750$
 ٩-٢-١ (١) للعلاقة (i) 4.94, 6.06, 7.50, 9.26
 للعلاقة (ii) 5, 6, 7, 8
 (٣) $t = 2.026 + 0.357r$
 ٩-٣-١ (أ) المدى هو من -1 إلى +1
 (ج) $r = 0.950$
 تغير الوحدات لا يؤثر على r .
 ٩-٤-١ (١) ارتباط الرتبة بين المبيعات ، والسعر يساوى 0.827 .
 ارتباط الرتبة بين المبيعات ، والخفصة يساوى 0.421 .
 (٢) ارتباط الرتبة بين الخفصة ، وحجم الساحة الأمامية يساوى 0.206 .

الفصل الحادي عشر

١١-١-١	(أ) 966.7	(ب) 1355.7
١١-١-٢	966.7	
١١-١-٣	766.7	
١١-١-٤	252.2	
١١-١-٥	1150.0	
١١-١-٦	966.7	
١١-١-٧	1158.7	
١١-١-٨	(ج) رقم ياش هو 137.9 .	
١١-١-٩	(أ) 136.2	(ب) 208.5 .

تمارين

١١-٣	لـ 1971 الرقم القياسي هو 109.0
١١-٤	لـ 1972 الرقم القياسي هو 126.3
١١-٤	(ب) (أ) 1.67 و 1.50
	(٣) 1.54 (٢) 158
	(٤) رقم ياش يساوي 161.44 ولا سيرز يساوي 158.15

الفصل الثاني عشر

١٢-١-١	(أ) 3	(ب) 33
١٢-٢-١	(أ) 0.7	(ب) 0.4
١٢-٣-١	$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$	
١٢-٤-١	(أ) $\frac{1}{48}$	(ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{35}{48}$
	ومجموع هذه الاحتمالات الثلاثة يساوي 1 .	
١٢-٤-٢	(أ) 0.64	(ب) 0.15 (ج) 0.29 (د) 0.3
١٢-٥-١	$5/6$	
١٢-٥-٢	(أ) $5/9$	(ب) $5/73$
١٢-٦-١	60 480	
١٢-٦-٢	210	
١٢-٦-٣	924	

تمارين

١٢-١	(أ) 0.252	(ب) 0.042	(ج) 0.514
١٢-٢	(أ) 0.3185	(ب) 0.0115	(ج) 0.2055

		0.22 (ii)	0.276 (i) (١)	١٣-٢-٣
			0.385 (٣)	
0.16 (ب)	0.48 (أ) (iii)	0.625 (ii)	0.8 (i) (١)	١٣-٢-٤
			0.62 (٢)	

الفصل الثالث عشر

- ١٣-٢-١ 2.7 يوم للمعلمة A ، 2.8 يوم للمعلمة B
١٣-٢-٢ 60 بدلة .
١٣-٣-١ (١) £3250 (٢) أولاً X ثم إذا أمكن Y
الربح المتوقع هو £2500
١٣-٤-١ الفرص الضائعة المتوقعة هي £32.25 للمعلم 0 باقة ، £18.50 للمعلم 100 باقة ، £9.75 للمعلم 200 باقة ،
£11.00 ، £18.50 للمعلم 400 باقة . أقصى ربح على المدى البعيد سيتحقق عند شراء 200 باقة في اليوم .
١٣-٥-١ (ب) 30 000 برنامج
(جـ) الربح مع معلومات دقيقة قيمته المتوقعة £133 000 للموسم .
قيمة المعلومات الدقيقة للموسم حتى £20 000
١٣-٦-١ (١) Z (٢) X (٣) Y

تعاريف

- ١٣-١ التكاليف المتوقعة هي (١) £13 100 (٢) £16 300 (٣) £16 000
يوصى بـ (١) .
١٣-٢ الفرص الضائعة المتوقعة هي : £5600 عند عدم التطوير ، £9600 عند التطوير .
يوصى بعدم التطوير .
١٣-٣ (أ) 1.7 (ب) 3 (جـ) £6000 (د) £4100 .
١٣-٤ أكبر قيمة حالية صافية هي للمصنع الأكبر .
(القيم المتوقعة للمصنع الكبير ، والصغير هي 3771.45 و 2014.05)

الفصل الرابع عشر :

- ١٣-٢-١ (أ) 0.3932 (ب) 0.3446
١٣-٢-٢ 0.879
١٣-٢-٣ بين 40 و 60
١٣-٣-١ 0.2381
١٣-٣-٢ لا يسبب التوقع في زيادة الربح اليومي يكون فقط £143
١٣-٤-١ لا يسبب التوقع في تكلفة كل صندوق مدرج هو فقط 2.8 بنس

0.159 (٤)	7.7 من الأسابيع (٣)	0.533 (٢)	0.308 (١)	١-٦-١٤
0.1762 (٤)	0.1811 (٣)	0.3085 (٢)	23 ساعة (١)	٢-٦-١٤
				0.0228 ٣-٦-١٤
				0.0968 ١-٧-١٤

تعارين

			23.3% (١)	10.9% (٢)	١-١٤
0.0287 (٤)	0.00202 (٣)	0.2119 (٢)	0.5 (١)		٢-١٤
					٣-١٤ (١)
					$e^{-\lambda}, \lambda e^{-\lambda}, \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}, \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda}, \frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda}$
					$e^{-2\lambda}, 2\lambda e^{-2\lambda}, 2\lambda^2 e^{-2\lambda}, \frac{4}{3} \lambda^3 e^{-2\lambda}, \frac{2}{3} \lambda^4 e^{-2\lambda}$ (٢)
					٤-١٤ (أ) 0.000 7864 (ب) 0.8658

الفصل الخامس عشر

0.017 (ب)	0.9375 g ، 502 g (أ)	١-١-١٥
	£12 387 إلى £11 613 ، £150 (١)	١-٢-١٥
	0.174 إلى 0.146 (٢)	٢-٢-١٥
	17.25 إلى 11.75 (٣)	١-٣-١٥

تعارين

			14.77 إلى 19.23 .	١-١٥
			توزيع طبيعي بوسط يساوي ١٥ ، وانحراف معياري يساوي 2.5 .	٢-١٥
			95.1 إلى 104.9 (٢)	٣-١٥
			0.448 إلى 0.352 (٣)	٤-١٥
			0.3830 (٢)	٥-١٥
			0.0668 (١)	٦-١٥
			0.0062 (ب)	٧-١٥
			0.2112 (ج)	٨-١٥
			48.355 إلى 51.645 (د)	٩-١٥

الفصل السادس عشر

H_0 رفض	$T = -3 (< -1.645)$	١-٢-١٦
H_0 قبول	$T = 0.9 (< 1.645)$	٢-٢-١٦
H_0 رفض	$T = -1.75 (< -1.645)$	٣-٢-١٦
H_0 قبول	$T = 1.632 (< 2.33)$	٤-٢-١٦
4.41: H_0 قبول	$T = -1.765 (> -2.13)$	١-٣-١٦
H_0 رفض	$r = 0.808, T = 3.62 (> 2.36)$	٢-٣-١٦

تمارين

١-١٦ (١) 0.03 ، 0.0668 ؛ (٢) $T = 3.24 (> 1.645)$	رفض H_0
٢-١٦ $T = -3.5 (< -1.75)$	رفض H_0
٣-١٦ $T = -2.4 (< -1.645)$	رفض H_0

الفصل السابع عشر

١-١٧ $\chi^2 = 7.88 (< 11.1)$	قبول H_0
١-٢-١٧ $\chi^2 = 11.1 (> 3.84)$	رفض H_0
١-٣-١٧ $\chi^2 = 2.99 (< 5.99)$	قبول H_0

تمارين

١-١٧ $\chi^2 = 4.75 (< 5.99)$	قبول H_0
٢-١٧ $\chi^2 = 6.615 (> 5.99)$	رفض H_0
٣-١٧ $\chi^2 = 1.50 (< 5.99)$	قبول H_0

الفصل الثامن عشر

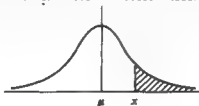
- ١٨-١١ (أ) 17.461 الى 17.359
 (جـ) عيب يعمل بعد المينة 6 .
 ١٨-٢ (أ) 0.0342
 (ب) الحد الداخلي يساوى 0.0470 ، الحد الخارجى يساوى 0.0599
 (جـ) لا .

الملحق الثاني

جداول احصائية

المساحات الطرية للتوزيع الطبيعي

$\frac{X - \mu}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2398	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1410	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0778	.0764	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.02275	.02222	.02169	.02128	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00748	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139



المساحة الطرية	10%	5%	2.5%	2%	1%	0.1%	0.01%	0.001%
$\frac{X - \mu}{\sigma}$	1.2816	1.6449	1.9600	2.0537	2.3263	3.0902	3.7190	4.2649

نقط النسبة المئوية لتوزيع t

اختبارات من طرفين						
v	10%	5%	2%	1%	0.1%	v
1	6.31	12.7	31.82	63.7	63.7	1
2	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6	2
3	2.35	3.18	4.54	5.84	12.9	3
4	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61	4
5	2.01	2.57	3.36	4.03	6.86	5
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96	6
7	1.89	2.36	3.00	3.50	5.40	7
8	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04	8
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78	9
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59	10
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44	11
12	1.78	2.18	2.68	3.05	4.32	12
13	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22	13
14	1.76	2.14	2.62	2.98	4.14	14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07	15
16	1.75	2.12	2.58	2.92	4.01	16
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96	17
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92	18
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88	19
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.85	20
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.82	21
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.79	22
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.77	23
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.74	24
25	1.71	2.06	2.48	2.79	3.72	25
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.71	26
27	1.70	2.05	2.47	2.77	3.69	27
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.67	28
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.66	29
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.65	30
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.55	40
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.46	60
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.37	120
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.29	∞

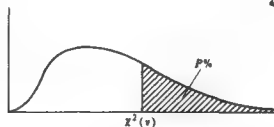
v	5%	2.5%	1%	0.5%	0.05%	v
اختبارات من طرف واحد						

v هي عدد درجات الحرية

نقاط النسبة المئوية لتوزيع χ^2

	P(%)											
v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
1	0.0439	0.0315	0.0398	0.0039	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	1
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	2
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	4
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	6
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.87	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.53	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	28
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	29
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	30

v هي عدد درجات الحرية



الملحق الثالث

قائمة القوانين

نمطى هنا ملخصاً للقوانين الأكثر أهمية ، والمفاهيم التى قد أدرجت فى هذا الكتاب .

الفصل الثانى :

المعادلة العامة للخط المستقيم $y = a + bx$

حيث a هو الجزء المقطوع من محور x

b هو الانحدار .

الصورة العامة لمنحنى الدرجة الثانية $y = ax^2 + bx + c$

الحلول للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هى $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

الفصل الثالث

المتوالية الهندسية : الحد رقم n هو $t_n = a + (n - 1)d$

مجموع n من الحدود $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$

المتوالية الهندسية : الحد رقم n هو $t_n = ar^{n-1}$

مجموع n من الحدود $S_n = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$

فائدة مركبة : $P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

قيمة حالية : $P_0 = P_n \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-n}$

راتب سنوى : $P_0 = \frac{A [1 - (1 + r/100)^{-n}]}{r/100}$

الفصل الثامن

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \quad \text{الوسط للبيانات الغير مبوبة :}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \quad \text{الوسط للبيانات المبوبة :}$$

$$\bar{x} = L + \frac{(50\% - P_1)}{(P_2 - P_1)} \times (U - L) \quad \text{الوسيط للبيانات المبوبة :}$$

$$L + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \times (U - L) \quad \text{الموال :}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2} \quad \text{الانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة :}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2} \quad \text{الانحراف المعياري للبيانات المبوبة :}$$

$$MD = \frac{\Sigma |x - \bar{x}|}{n} \quad \text{الانحراف المتوسط :}$$

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad \text{نصف المدى الربيعي :}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100 \quad \text{معامل التباين :}$$

$$\frac{3(\bar{x} - \bar{x})}{s} \quad \text{معامل بيرسون للالتواء :}$$

$$\frac{(Q_3 - \bar{x}) - (\bar{x} - Q_1)}{QD} \quad \text{معامل بولي للالتواء :}$$

الفصل التاسع :

$$y = a + bx \quad \text{خط الانحدار للمربعات الصغرى :}$$

$$b = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}, a = \frac{\Sigma y - b \Sigma x}{n} \quad \text{حيث}$$

$$r = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right] \left[\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}} \quad \text{معامل الارتباط :}$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} \quad \text{معامل سبيرمان لارتباط الترتيب :}$$

الفصل الحادى عشر

$$\frac{\sum p_n}{\sum p_0} \times 100$$

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار :

$$\frac{1}{k} \sum \frac{p_n}{p_0} \times 100$$

الوسط البسيط لمتناسب الأسعار :

$$\frac{\sum (p_n q_0)}{\sum (p_0 q_0)} \times 100$$

رقم لاسبيرز القياسى للأسعار :

$$\frac{\sum (p_n q_n)}{\sum (p_0 q_n)} \times 100$$

رقم باش القياسى للأسعار :

الفصل الثانى عشر :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قاعدة الجمع :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$$

قاعدة الضرب :

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) P(A_j)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

نظرية بايز :

الفصل الثالث عشر :

$$\sum_{\text{كل نتائج التجربة}} (\text{احتمال النتيجة}) \times (\text{القيمة المرتبطة بالنتيجة})$$

القيمة المتوقعة :

الفصل الرابع عشر

$$P(r \text{ من النجاحات}) = {}^nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

توزيع ذى الحدين :

$$\text{الانحراف المعياري} = np \quad \text{الوسط} = np(1-p)$$

$$P(r \text{ من النجاحات}) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$$

توزيع بواسون :

$$\text{الانحراف المعياري} = m \quad \text{الوسط} = \sqrt{m}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-[(x-\mu)^2/2\sigma^2]}$$

توزيع طبيعى :

$$\mu = \text{الوسط} \quad \sigma = \text{الانحراف المعياري}$$

الفصل الخامس عشر

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

الخطأ المعياري للوسط :

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

الخطأ المعياري للنسبة :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

التقدير غير المتحيز لتباين المجتمع :

الفصل السادس عشر

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

اختبار للوسط الواحد :

الذي له توزيع طبيعي حينما تكون n كبيرة ، σ معلومة .

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}$$

الخطأ المعياري للفرق بين المتوسطات :

$$\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

الخطأ المعياري للفرق بين النسب :

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

اختبار للوسط الواحد :

الذي له توزيع t بـ $n - 1$ درجات حرية v حينما يكون المجتمع التابع طبيعياً .

$$T = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}$$

اختبار عدم الترابط :

الذي له توزيع t بـ $n - 2$ درجات حرية v

الفصل السابع عشر

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1}$$

احصاء كاي تربيع :

الملحق الرابع

قائمة بالقراءات المقترحة

على الرغم من اعتقادنا بأن هذا الكتاب سوف يكون مفيداً للمهتمين بمجال الأعمال ، فقد وضعناه أساساً من أجل طلبة المستوى الأساسي في المحاسبة . وقد اتمكس هذا في الأمثلة والتمارين ، وفي مجال الموضوعات المحتواة . مثلاً ، قليل جداً من الاختبارات الاحصائية في هذا المستوى تحتوي كثيراً من العمليات الرياضية مثل ما في هذا الكتاب . ومن المقصود أن الكتب المسماة في المراجع الآتية أن تساعد القراء لنظرة أوسع في واحد أو أكثر من الطرق الآتية :

- ١ - بتقديم مدى أهم من الأمثلة والتمارين في الموضوعات المعطاه .
 - ٢ - بتقديم معالجة بديلة للموضوعات ، وفي بعض الأمثلة ، المعالجة تمتد لمستوى أكثر تقدماً .
 - ٣ - بالإشارة إلى مكان موضوعات بحوث العمليات ، التي لمست باختصار في هذا الكتاب ، ويمكن اتباعها .
- العمود الذي على اليسار من الجدول يبين فصول هذا الكتاب والتي تخص الكتب المقترحة .

الكتب

الفصل الأول

- Edwards, B., *Sources of Business and Economic Statistics*, Heinemann, London, 1972.
Huff, D., *How to Lie with Statistics*, Penguin, London, 1973.
Reichmann, W. J., *Use and Abuse of Statistics*, Penguin, London, 1972.

الفصل الثاني

- Moore, P. G., *Basic Operational Research*, Pitman, London, 1976.
Wilks, F. M., *Elements of Operational Research*, McGraw-Hill, London, 1980.

الفصل الثالث

- Ayres, F. J., *Mathematics of Finance*, McGraw-Hill, New York, 1963.
Lucy, T., *Quantitative Techniques*, D. P. Publications, Winchester, 1979.

الفصلان الرابع والخامس

Dinwiddy, C., *Elementary Mathematics for Economists*, Oxford U.P., E. Africa, 1968.

Weber, J. E., *Mathematical Analysis - Business and Economic Applications*, Harper & Row, New York, 1976.

الفصل السادس

Moser, C. A., and C. Kalton, *Survey Methods in Social Investigation*, Heinemann, London, 1971.

الفصول من السابع إلى السابع عشر

Freund, J. E., and F. J. Williams, *Elementary Business Statistics: The Modern Approach*, Prentice-Hall, London, 1977.

Kazmier, L. J., *Theory and Problems of Business Statistics*, "Schaum Outline Series", McGraw-Hill, New York, 1976.

Taylor, P., and D. Dunning, *Statistics for Business*, Polytech. Pub., Stockport, 1977.

Yeomans, K. A., *Statistics for the Social Scientist*, Vols. I and II, Penguin, Harmondsworth, 1968.

الفصل الثالث عشر

Thomas, H., *Decision Theory and the Manager*, Pitman, London, 1972.

الفصل الرابع عشر

Meyer, P., *Introductory Probability and Statistical Applications*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

الفصل الثامن عشر

McRae, T. W., *Statistical Sampling for Audit and Control*, Wiley, London, 1974.

Smith, T. M. F., *Statistical Sampling for Accountants*, Haymarket, London, 1976.

المصطلحات العلمية (عربي - انجليزي)

(١)

Trend	اتجاه
Union of sets	اتحاد الفئات (المجموعات)
Decision making	اتخاذ القرار
Consistency	اتساق
Continuous compounding	اتصال مركب
Probability	احتمال
Bayesian probability	احتمال بايزي
Empirical probability	احتمال تجريبي
Conditional probability	احتمال شرطي
Classical probability	احتمال كلاسيكي
Posterior probability	الاحتمال اللاحق
Prior probability	الاحتمال المسبق
Mutually exclusive events	احداث متنافية
Inferential statistics	احصاء استقرائي
Financial statistics	الاحصاء المالي
Family Expenditure survey	احصاء الانفاق العائلي
Descriptive statistics	احصاءات وصفية
Statistic	احصاء
Sinking fund	رصيد للإحلال
Goodness of fit test	اختبار جودة التوفيق
Chi-squared test	اختبار كاي تربيع
Significance test	اختبار معنوي
One-tailed test	اختبار من طرف واحد
Hypothesis testing	اختبارات الفروض
Proportions tests	اختبارات النسب
Correlation	ارتباط
Correlation and independence	ارتباط واستقلال
Rank correlation	ارتباط الرتبة

Negative correlation	ارتباط سلبى
Unweighted index numbers	أرقام قياسية غير مرجحة
Link-based index numbers	الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة
Questionnaire	استقصاء
Postal questionnaire	استقصاء بريدى
Strategies in decision	استراتيجيات اتخاذ القرار
Extrapolation	استكمال خارجى
Interpolation	استكمال داخلى
Depreciation	استهلاك (خفض)
Reducing balance depreciation	استهلاك الأصول الثابتة بطريقة النسبة الثابتة
Econometrics	اقتصاد قياسي
Skewness	الالتواء
Mean deviation	انحراف متوسط
Standard deviation	الانحراف المعياري
Types of error in hypothesis	أنواع الخطأ في اختبارات الفروض
Objectives in decision making	الأهداف عند اتخاذ القرار
Value weights	أوزان ترجيح للقيم

(ب)

Ungrouped data	بيانات غير مبنية
Grouped data	بيانات مبنية
Linear programming	برمجة خطية

(ت)

Permutations	تباديل
Variance	تباين
Time-series analysis	تحليل السلاسل الزمنية
Input-output analysis	تحليل المدخل والمخرج
Factorization method for quadratic equations	تحليل معادلة الدرجة الثانية إلى عوامل
Biase	تحيز
Bias in surveys	تحيز في المسوح
Transposition of matrices	تدوير المصفوفات
Typical time weighting of index numbers	ترجيح الأرقام القياسية طبقاً للسنة النموذجية

Dispersion	نشت
Dispersion of data	نشت البيانات
Relative dispersion	نشت نسبي
Continuity correlation	تصحیح مستمر
Yates continuity correlation	تصحیح يتس المتصل
Census	تعداد
Multicollinearity	تعدد العلاقات الخطية
Cyclical variation	تغير دوري
Seasonal variation	تغير موسمي
Differentiation	تفاضل
Kurtosis	تفرطح
Intersection of sets	تقاطع الفئات (المجموعات)
Estimation	تقدير
Point estimation	تقدير بنقطة
Unbiased estimate	تقدير غير متحيز
Estimation sampling of variables	تقدير المعاينة للمتغيرات
Frequency of a class	تكرار الفئة
Cumulative frequency	تكرار متجمع
Relative frequency	تكرار نسبي
Marginal cost	تكلفة حدية (هامشية)
Deflating	تكميش
Prediction	تنبؤ
Forecasting from a time series	تنبؤ من السلاسل الزمنية
Combinations	توافيق
Combinations of normal distributions	توافيق التوزيعات الطبيعية
Probability distribution	توزيع احتمالي
Exponential distribution	توزيع أسّي
Poisson distribution	توزيع بواسون
Poisson approximation to the binomial distribution	توزيع بواسون كتقريب ذي الحدين
Binomial distribution	توزيع ذي الحدين
Student's t -distribution	توزيع - t لستودنت
Normal distribution	توزيع طبيعي
Normal approximation to the binomial distribution	توزيع طبيعي كتقريب ذي الحدين

Bivariate normal distribution	توزيع طبيعي ثنائي
Continuous distribution	توزيع متصل
Sampling distribution of means	توزيع المعاينة للأوساط
Sampling distribution of proportions	توزيع المعاينة للنسب
Discrete distribution	توزيع منفصل
Best fit	توفيق أفضل

(جـ)

Frequency tables	جداول تكرارية
Contingency table	جدول اقتران
Percentage frequency table	جدول تكرار النسبة المئوية
Cumulative percentage frequency table	جدول تكرار النسبة المئوية المتجمع
Pay off table	جدول العائد
Intercept	جزء مقطوع
Addition of probabilities	جمع الاحتمالات
Addition of matrices	جمع المصفوفات
Goodness of fit	جودة التوفيق

(حـ)

Size of sample	حجم العينة
Action limit	حد الانجاز
Warning limit	حد الانذار
Class boundary	حد الفئة
Limitations of statistics	حدود الاحصاء
Five-bar gate	حزمة
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Judgement sampling	حكم بالمعاينة

(خـ)

Means chart	خرائط الأوساط
Control chart	خريطة الضبط
Quality control chart	خريطة ضبط الجودة
Bar chart	خريطة المستطيلات (الأعمدة)

Compound bar chart	خريطة المستطيلات (الأعمدة) المركبة
Percentage component bar chart	خريطة المستطيلات المفردة للنسب المئوية
Discounting	خصم
Linear regression	خط الانحدار
Line of equal distribution	خط التوزيع المتساوي
Line of best fit	خط التوفيق الأفضل
Straight line	خط مستقيم
Standard error	خطاً معيارى

(٥)

Exponential function	دالة أسية
Revenue function	دالة الإيراد
Cost function	دالة التكلفة
Probability density function	دالة الكثافة الاحتمالية
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Semilog function	دالة نصف لوغاريتمية
Marginal revenue	دخل اضافى
Degrees of freedom	درجات الحرية
Annuities	دفعات سنوية متساوي
Spurious accuracy	دقة زائفة
Business cycles	دورات الاقتصاد

(٦)

Quartile	ربيع
Time series graphs	رسم بياني للسلاسل الزمنية
Semi-log graph	رسم بياني نصف لوغاريتمى
Pictogram	رسم مصور
Graphs (see equations and graphs)	رسومات بيانية (انظر معادلات وأشكال بيانية)
Pie chart	رسوم دائرية
Paasche index number	رقم باشى القياسى
Index of Retail Prices	رقم قياسى لاسمار التجرة
Simple aggregative index	رقم قياسى تجميعى بسيط
Weighted aggregative index	رقم قياسى تجميعى مرجح

Typical year index	رقم قياس بطريقة السنة النموذجية
Value index	رقم قياس للقيم
Quantity relative	رقم قياس كمي
Laspeyres index number	رقم لاسبيرز للقياس
(ز)	
Given time	زمن معلوم
(س)	
Causality	سببيه
Time series	سلاسل زمنية
Chain based index numbers	سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة
Abuses of statistics	سوء استخدام الإحصاء
(ش)	
Decision trees	شجرات القرار
Scatter diagram	شكل الانتشار
Venn diagram	شكل فن
Uncertainties in decision making	شكوك في اتخاذ القرار
(ض)	
Multiplication of probabilities	ضرب الاحتمالات
Multiplication of matrices	ضرب المصفوفات
(ط)	
Sampling methods	طرق المعاينة
Method of moving averages	طريقة المتوسطات المتحركة
Method of least squares	طريقة المربعات الصغرى
Class length	طول الفئة
(ع)	
Non-response	عدم الاستجابة
Non-linear relationships	علاقات غير خطية
Bar	عمود (مستطيل)

Sample	عينة
Simple random sample	عينة عشوائية بسيطة
(غ)	
Nonlinear	غير خطي
(ف)	
Opportunity loss	فائقة الفرصة
Sample interest	فائدة بسيطة
Interest with increments	فائدة بالتزايد
Compound interest	فائدة مركبة
Base weighting of index number	فترة الأساس للرقم القياسي
Interval estimation	فترة التقدير
Confidence interval	فترة الثقة
Alternative hypothesis	فرض بديل
Null hypothesis	فرض صفري
Difference between means	فرق بين الأوساط
Difference between proportions	فرق بين النسب
Common difference	فرق مشترك
Sample space	فضاء العينة
Series	سلاسل (مجموعات)
Modal class	فئة المنوال
Median class	فئة الوسيط
(ق)	
Bayesian decision rule	قاعدة قرار بايز
Rectangular hyperbola	قطع زائد قائم
Decision rules	قواعد اتخاذ القرار
Power of a test	قوة الاختبار
Present value	قيمة حالية
Expected value	قيمة متوقعة
(ك)	
Discovery sampling	كشف بالمعاينة

(٢)

Vector	متجه
column vector	متجه عمودي
Variable	متغير
Dependent variable	متغير تابع
Exogenous variable	متغير خارجي
Random variable	متغير عشوائي
Quantitative variable	متغير كمي
Qualitative variable	متغير كيفي
Independent variable	متغير مستقل
Discrete variable	متغير منفصل
Series	متوالية
Arithmetic series	متوالية عددية
Geometric series	متوالية هندسية
Moving averages	متوسطات متحركة
Pascal's triangle	مثلث باسكال
Population	مجتمع
Finite population	مجتمع محدود
Sets	مجموعات (فئات)
Determinant of matrix	محدد المصفوفة
Tree diagram	مخطط الشجرة
Lieptokurtic	مذهب
Histogram	مدرج تكراري
Range	مدى
Interquartile range	مدى ربعي
Sample auditing	مراجعة بالعينة
Least squares	مربعات صغرى
Components of a time series	مركبات السلاسل الزمنية
Class mark	مركز الفئة
Elasticity	مرونة
Elasticity of price	مرونة السعر
Elasticity of demand	مرونة الطلب
Area of inequality	مساحة المتباينة

Area under probability density curves	مساحة تحت منحنى دالة الكثافة
Area under the normal curve	مساحة تحت المنحنى الطبيعي
Minimization problems	مسائل تحقيق الحد الأدنى
Maximization problems	مسائل تحقيق الحد الأعلى
Constant repayment problem	مسائل الدفع المتساوى
Bar	مستطيل (عمود)
Significance level	مستوى المعنوية (الثقة)
Derivative	مشتقة
Sources of statistical informations	مصادر للمعلومات الاحصائية
Matrices	مصفوفات
Input-output matrix	مصفوفة المدخل - والمخرج
Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Factorials	مضروبيات
Ogive	مضلع التكرار المتجمع
Frequency polygon	مضلع تكرارى
Equations and graphs	معادلات وأشكال بيانية
Simultaneous equations	معادلات آتية
Linear equations	معادلات خطية
Quadratic equations	معادلات الدرجة الثانية
Normal equations	معادلات عادية
Correlation coefficient	معامل الارتباط
Coefficient of rank correlation	معامل ارتباط الرتبة
Coefficient of skewness	معامل الالتواء
Bowley's coefficient of skewness	معامل بولى للالتواء
Pearson's coefficient of skewness	معامل بيرسون للالتواء
Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient of variation	معامل التغير
Spearman's coefficient of rank	معامل سبيرمان لارتباط الرتب
Technical coefficients	معاملات تقنية
Sampling	معاينة
Probability sampling	معاينة احتمالية
Monetary unit sampling	معاينة حسب وحدة العملة
Quota sampling	معاينة بالحصة
Stratified sampling	معاينة طبقية

Random sampling	معينة عشوائية
Multi-stage sampling	معينة على مراحل
Cluster sampling	معينة عنقودية
Acceptance sampling	معينة مقبولة
Systematic sampling	معينة منتظمة
Rate of change	معدل التغير
Internal rate of return	معدل الدخل للمال
Parameter	معلمة (وجمعها معالم)
Perfect informations	معلومات كاملة
Platykurtic	مفرطح
Interviewing	مقابلة شخصية (مواجهة)
Measures of location	مقاييس التخصيص
Estimator	مُقدر
Inversion of matrices	مقلوب المصفوفات
Criteria for decision making	معايير اتخاذ القرار
Minimax criterion	معيار الحد الأدنى - الأعلى
Maximin criterion	معيار الحد الأعلى - الأدنى
Maximax criterion	معيار الحد الأعلى - الأعلى
Measure of skewness	مقياس الالتواء
Measure of variation	مقياس التغير
Annual abstract of statistics	ملخص سنوى للإحصاء
Utilities in decision making	منافع اتخاذ القرار
Lorenz curve	منحنى لورنز
Price relative	منسوب السعر
Quantity relative	منسوب كمي
Critical region	منطقة حرجية
Rejection region	منطقة الرفض
Acceptance region	منطقة القبول
Feasible region	منطقة متاحة (الجدوى)
Mode	متوال
Gradient	ميل

(٥)

Central tendency

نزعة مركزية

Ratio	نسبة
Common ratio	نسبة مشتركة
Percentage	نسبة مئوية
Quartile deviation	نصف المدى الربيعى
Baye's theorem	نظرية بايز
Central limit theorem	نظرية الحد المركزى
Index-linked saving scheme	نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسى
Point of inflexion	نقطة انقلاب
Turning point	نقطة دوران
Minimum turning point	نقطة الدوران الصغرى
Maximum turning point	نقطة الرجوع العظمى

(د)

Mean	وسط
Simple mean of relatives	وسط بسيط للنسائيب
Arithmetic mean	وسط حسابى
Assumed mean	وسط فرضى
Weighted mean of relative index	وسط مرجع للنسائيب
Median	وسط
Base time	وقت قاعلى

المصطلحات العلمية (انجليزي - عربي)

(A)

Absolute	مطلق
Abuses of statistics	سوء استخدام الاحصاء
Acceptance sampling	معاينة مقبولة
Account	حساب
Accountant	محاسب
Accounting	محاسبة
Accumulation	تراكم
Action limit	حد انجاز الاجراء
Activity	نشاط
Addition	جمع
Addition of matrices	جمع المصفوفات
Addition of probabilities	جمع الاحتمالات
Agency	وكالة
Agent	وكيل
Aggregate	كلى ، شامل
Aggregation	تجميع
Agreement	اتفاق
Aid	اعانة ، مساعدة
Allocation	تخصيص
Alternative hypothesis	الفرض البديل
Annual abstract of statistics	الملخص السنوى للاحصاء
Annuities	الدفعات السنوية المتساوية
Area	مساحة
Area of inequality	مساحة المتباينة
Area under the normal curve	مساحة تحت المنحنى الطبيعي
Area under probability density curve	مساحة تحت منحنى دالة الكثافة
Arithmetic mean	وسط حسابي
Arithmetic series	متوالية عددية
Aspect	جانب من ، أو زاوية من

Assets	أصول
Assumed mean	وسط فرضي

(B)

Bar	مستطيل (عمود)
Bar chart	خريطة المستطيلات (الأعمدة)
Base time	وقت أساسي
Base wage	أجر أساسي
Base weighting of index numbers	الترجيح القاعدي للأرقام القياسية
Bayes' theorem	نظرية بايز
Bayesian decision rule	قاعدة قرار بايز
Bayesian probability	احتمال بايز
Behaviour	سلوك
Best fit	التوفيق الأفضل
Bias in surveys	التحيز في المسوح
Binomial distribution	توزيع ذو الحدين
Bivariate normal distribution	التوزيع الطبيعي الثنائي
Boom	رواج
Bowley's coefficient of skewness	معامل بولسي للانواء
Budget	ميزانية ، موازنة
Budgets	الموازنات
Business activity	نشاط تجاري
Business cycles	دورات اقتصادية

(C)

Calculation	حساب ، تقدير
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Capital	رأس المال
Causality	السببية
Cause	سبب
Census	تعداد
Central limit theorem	نظرية الحد المركزي
Central tendency	النزعة المركزية
Chain based index numbers	سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية
Change	تغير

Chi-squared test	اختبار كاي تربيع (ك ^٢)
Class boundary	حد الفئة
Class frequency	تكرار الفئة
Class length	طول الفئة
Class limits	حدود الفئة
Class mark	مركز الفئة
Classes	فئات
Classical probability	احتمال كلاسيكي (قياسى)
Cluster sampling	معينة عنقودية
Coding method	طريقة التكويد (الشفرة)
Coefficient	معامل
Coefficient of alienation	معامل إبعاد
Coefficient of contingency	معامل المقارنة
Coefficient of correlation	معامل الارتباط
Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient of rank correlation	معامل ارتباط الرتبة
Coefficient of skewness	معامل الالتواء
Coefficient of variation	معامل التباير (الاختلاف)
Column vector	متجه عمودى
Combinations	توافيق
Combinations of normal distributions	توافيق لتوزيعات طبيعية
Common difference	فرق مشترك
Common ratio	نسبة مشتركة
Company	شركة
Competition	منافسة
Component bar chart	خريطة مستطيلات مفردة
Components of a time series	مركبات السلاسل الزمنية
Compound bar chart	خريطة مستطيلات مركبة
Compound interest	فائدة مركبة
Conditional probability	احتمال شرطى
Confidence interval	فترة الثقة
Consistence	تناسق ، اتساق
Constant	ثابت
Constant repayment problems	مسائل الدفع المتساوى

Consumer	مستهلك
consumption	استهلاك
Contingency table	جدول القتران
Continuity correction	تصحیح مستمر
Continuous compounding	تركيب متصل
Continuous distribution	توزيع متصل
Control	رقابة ، مراقبة
Control chart	خريطة الضبط
Copartnership	مشاركة
Correlation	ارتباط
Correlation and independence	ارتباط واستقلال
Correction of errors	تصويب الأخطاء
Correlation ratio	نسبة الارتباط
Cost	تكلفة
Cost Accounting	محاسبة التكاليف
Cost function	دالة التكلفة
Criteria for decision making	معايير اتخاذ القرار
Critical region	منطقة حرجية
Cumulative frequency curve	المنحنى التكرارى المتجمع
Cumulative frequency distributions	التوزيعات التكرارية المتجمعة
Cumulative frequency table	جدول تكرار متجمع
Cumulative percentage frequency table	جدول تكرار نسبي متجمع
Cyclical variation	تغير دورى

(D)

Debt	دين
Decision making	اتخاذ القرار
Decision rules	قواعد اتخاذ القرار
Decision trees	شجرات القرار
Deflating	تكفيض
Degree	درجة
Degrees of freedom	درجات الحرية
Demand	طلب
Dependence	تبعية

Dependent variable	متغير تابع
Depreciation	استهلاك - انتقاص
Depression	كساد
Derivative	مشتقة
Descriptive statistics	احصاءات وصفية
Deseasonalizing time series	سلاسل زمنية بعد استبعاد الأثر الموسمي
Determinant of matrix	محدد المصفوفة
Deviation	انحراف
Diagram	شكل بياني
Difference	فرق
Difference between proportions	الفرق بين النسب
Differentiation	تفاضل
Discounting	الخصم
Discovery sampling	استكشاف بالعينة
Discrete distribution	توزيع منفصل
Discrete variable	متغير منفصل
Disparity	مفارقة
Dispersion of data	تشتت البيانات
Distributions of probability	توزيعات احتمالية
Division	تقسيم

(E)

Efficiency	فعالية
Elasticity of demand	مرونة الطلب
Electronic computers	الحاسبات الالكترونية
Employee	مستخدم
Employment	عمالة
Equations and graphs	معادلات وأشكال بيانية
Estimation	تقدير
Estimation sampling	تقدير المعاينة
Estimation of attributes	تقدير للمصفات
Estimation of variables	تقدير للمتغيرات
Expected value	قيمة متوقعة
Expenses	مصاريف ، نفقات

Exponential function	دالة أسية
External auditing	المراجعة الخارجية
Extrapolation	استكمال خارجى

(F)

Factorials	مضارب
Factorization method for quadratic equations	التحليل إلى عوامل لمعادلات الدرجة الثانية
Family expenditure survey	إحصاء الانفاق العائلى
Feasible region	منطقة الجدوى (المنطقة المتاحة)
Financial activity	نشاط مالى
Financial statistics	الإحصاء المالى
Finite population	مجتمع محدود
First-order autocorrelation	ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى
Five-bar gate	حزمة
Forecasting	التنبؤ
Forecasting from a time series	تنبؤ من السلاسل الزمنية
Frequency	تكرار
Frequency polygon	مضلع تكرارى
Frequency tables	جداول تكرارية

(G)

Geometric mean	الوسط الهندسى
Geometric series	متوالية هندسية
Given time	زمن معطى
Given time weighting of index numbers	الأرقام القياسية المرجحة حسب الزمن المعطى
Goodness of fit	جودة التوفيق
Goodness of fit test	اختبار جودة التوفيق
Gradient	ميل
Graphs	اشكال بيانية
Grouped data	بيانات ميوقة

(II)

Harmonic mean	الوسط التوافقي
Heteroscedasticity	اختلاف التباين
Histogram	المدرج التكراري
Hypothesis testing	اختبار الفروض

(I)

Identification	تعريف (أو تحديد)
Independence and correlation	استقلال وتربط
Independent variable	متغير مستقل
Index-linked saving schemes	نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسي
Index numbers	أرقام قياسية
Index of retail prices	رقم قياسي لأسعار التجزئة
Inferential statistics	احصاء استقرائي
Input-output analysis	تحليل المدخلات - المخرجات
Input-output matrix	مصفوفة المدخلات - المخرجات
Intercept	الجزء المقطوع
Interest	فائدة
Internal rate of return	معدل العائد الداخلي
Interpolation	استكمال داخلي
Intersection of sets	تقاطع المجموعات (الفئات)
Interval estimation	فترة التقدير
Interviewer bias	انحياز القائم بالمقابلة
Interviewing	المقابلة الشخصية
Inversion of matrices	معكوس المصفوفات

(J)

Joint probability	احتمال مشترك
Judgment sampling	حكم بالمعانية

(K)

Kurtosis	تفرطح
----------	-------

(L)

Lagged variable	متغير مبعث
Laspeyres index number	رقم لاسبيرز القياسى
Least squares	المربعات الصغرى
Level of economic activity	مستوى النشاط الاقتصادى
Level of significance	مستوى المعنوية
Limitations of statistics	حدود الاحصاء
Line of best fit	خط التوفيق الأفضل
Line of equal distribution	خط التوزيع المتساوى
Linear equations	معادلات خطية
Linear programming	برمجة خطية
Linear regression	خط الانحدار
Link-based index numbers	الأرقام القياسية المرتبطة
Logarithmic function	الدالة اللوغاريتمية
Lorenz curve	منحنى لورنز

(M)

Marginal cost	تكلفة حدية (هامشية)
Marginal revenue	الدخل الهامشى
Matrix	مصفوفات
Maximax criterion	مقياس الحد الأعلى - الأعلى
Maximin criterion	مقياس الحد الأعلى - الأدنى
Maximization problems	مسائل تحقيق الحد الأعلى
Maximum turning point	نقطة الرجوع العظمى
Mean	وسط
Mean deviation	الانحراف المتوسط
Measure of skewness	مقياس الالتواء
Measure of variation	مقياس التباير
Median	الوسيط
Median class	فئة الوسيط
Method of least squares	طريقة المربعات الصغرى
Method of moving averages	طريقة المتوسطات المتحركة
Minimax criterion	مقياس تصغير النهاية العظمى (أدنى الأعلى)

Minimization problems	مسائل تحقيق الحد الأدنى
Minimum turning point	نقطة الدوران الصغرى
Model class	الفئة المتوالية
Mode	متوال
Monetary unit sampling	المعينة حسب وحدة العملة
Moving averages	المتوسطات المتحركة
Multiplication	الضرب
Multiplication of matrices	ضرب المصفوفات
Multiplication of probabilities	ضرب الاحتمالات
Multi-stage sampling	المعينة على مراحل
Mutually exclusive events	أحداث متنافية

(N)

Negative correlation	ارتباط سلبى
Non-linear relationships	علاقات غير خطية
Non-response	عدم الاستجابة
Normal distribution	توزيع طبيعى
Null hypothesis	فرض صغرى

(O)

Objectives in decision making	الأهداف عند اتخاذ القرارات
Ogive	مضلع التكرار المتجمع
One-tailed test	اختبار من طرف واحد
Operating characteristic curve	منحنى توصيف العمليات
Opportunity loss	ضياع الفرصة (غائد الفرصة)
Order condition	شرط الترتيب

(P)

Paashe index number	رقم باشى القياسى
Parameter	بارامتر
Pascal's triangle	مثلث باسكال
Pay off table	جدول العائد
Pearson's coefficient of skewness	معامل بيرسون للانواء
Percentage	المئينات (نسبة مئوية)

Percentage component bar chart	خريطة الأعمدة للنسبة المئوية
Percentage compound bar chart	خريطة الأعمدة المتعددة للنسبة المئوية
Percentage frequency table	جدول تكرار النسبة المئوية
Permutations	تبديل
Personalistic (subjective) probability	احتمال شخصي ذاتي
Pictogram	رسم مصور
Pie chart	رسم دائري
Point estimation	تقدير نقطة
Point of inflexion	نقطة الانقلاب
Poisson distribution	توزيع بواسون
Population	المجتمع
Posterior probability	الاحتمال اللاحق
Power of a test	قوة الاختبار
Prediction	تنبؤ
Present value	قيمة حالية
Price index	رقم قياسي للسعر
Price relative	منسوب السعر
Prior probability	الاحتمال الترجيعي (المسبق)
Probability	الاحتمال
Probability density function	دالة الكثافة الاحتمالية
Probability distribution	توزيع احتمالي
Probability sampling	المعينة الاحتمالية
Proportions tests	اختبار النسب

(Q)

Quadratic equations	معادلات الدرجة الثانية
Qualitative variable	متغير كيفي
Quality control chart	خريطة ضبط الجودة
Quantitative variable	متغير كمي
Quantity index	رقم قياسي كمي
Quantity relative	المنسوب الكمي
Quartile	ربيع
Quartile deviation	الاتحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي)
Questionnaire	استقصاء

Quota sampling

معاينة حصة نسبية

(R)

Random sampling

معاينة عشوائية

Range

مدى

Rank condition

شروط الرتب

Rank correlation

ارتباط الرتب

Rate of change

معدل التغير

Ratio

نسبة

Rectangular hyperbola

قطع زائد قائم

Reducing balance depreciation

استهلاك الأصول الثابتة بطريقة النسبة الثابتة

Regression

انحدار

Regression analysis

تحليل الانحدار

Rejection region

منطقة الرفض

Relative dispersion

تشتت نسبي

Relative frequency

تكرار نسبي

Relative variation

اختلاف نسبي

Residuals

بقاوى

Retail prices index

رقم قياسى لأسعار التجزئة

Revenue function

دالة الإيراد

(S)

Sample

عينة

Sample auditing

المراجعة بالعينة

Sample size

حجم العينة

Sample space

فضاء العينة

Sampling

معاينة

Sampling distribution of means

توزيع المعاينة للمتوسط

Sampling distribution of proportions

توزيع المعاينة للنسب

Sampling methods

طرق المعاينة

Scatter diagram

شكل الانتشار

Seasonal variation

تغير موسمي

Semi-log function

دالة نصف لوغاريتمية

Semi-log graph

رسم بياني نصف لوغاريتمى

Serial correlation	ارتباط متسلسل
Series	متوالية
Set theory	نظرية المجموعات (الفئات)
Sets	مجموعات (فئات)
Significance level	مستوى المعنوية
Significance test	اختبار معنوي
Simple aggregative index number	الرقم القياسي التجميعي البسيط
Simple interest	فائدة بسيطة
Simple mean of relatives index	وسط بسيط للمناسيب
Simple random sampling	عينة عشوائية بسيطة
Simultaneous equations	معادلات آنية
Sinking fund	أرصدة الاحلال
Size of sample	حجم العينة
Skewness	التواء
Slop	ميل
Source of statistical information	مصادر للمعلومات الاحصائية
Spearman's coefficient of rank correlation	معامل سبيرمان لارتباط الرتب
Specification of Model	تحديد النموذج
Spurious accuracy	دقة زائفة
Standard deviation	انحراف معياري
Standard error	خطأ معياري
Statistic	احصائية
Statistical	علم الاحصاء
Stochastic	عشوائي
Straight line	خط مستقيم
Strategies in decision making	استراتيجيات اتخاذ القرار
Stratified sampling	معاينة طبقية
Student's t-distribution	توزيع t - لستودنت
Systematic sampling	معاينة منتظمة

(T)

t-distribution	توزيع t -
Technical coefficients	المعاملات الفنية
Time series	السلاسل الزمنية

Time series analysis	تحليل السلاسل الزمنية
Time series graphs	الرسم البياني للسلاسل الزمنية
Transposition of matrices	تدوير المصفوفات
Tree diagram	مخطط الشجرة
Trend	اتجاه
Turning point	نقطة دوران
Two-tailed test	اختبار من طرفين
Type I error	خطأ من النوع الأول
Type II error	خطأ من النوع الثاني
Types of error in hypothesis testing	أنواع الخطأ في اختبارات الفروض
Typical time weighting of index numbers	الأرقام القياسية الترجيحية للسنة النموذجية
Typical year index	رقم قياسي للسنة النموذجية

(U)

Unbiased estimate	تقدير غير متحيز
Ungrouped data	بيانات غير مبنوية
Union of sets	اتحاد الفئات (المجموعات)
Unweighted index numbers	أرقام قياسية غير مرجحة
Utilities in decision making	الفوائد في اتخاذ القرارات

(V)

Value index	رقم قياسي للقيم
Value weights	أوزان ترجيح للقيم
Variable	متغير
Variance	تباين
Variation, coefficient of	معامل الاختلاف
Vector	متجه
Venn diagram	شكل فن

(W)

Warning limit	حد الانذار
Weighted aggregative index	رقم القياس التجميعي المرجح
Weighted mean	وسط مرجح
Weighted mean of relatives index	وسط مرجح للمناسيب
Yates' continuity correction	تصحیح ييتس للاتصال

الفهرس الأبجدي

(١)

- اتجاه ، ١٧٢ - ١٨٧
اتحاد القنات ، ٢٠٥
اتخاذ القرار ، ٢٢٤ - ٢٤٣
اتصال مركب ، ٥٩ ، ٦٠
الاحتمال ، ٢٠٥ - ٢٢٣
احتمال بايز ، ٢٠٩ ، ٢١٠
احتمال شرطى ، ٢١٥ ، ٢١٦
احتمال كلاسيكى ، ٢٠٨ ، ٢٠٩
الاحتمال اللاحق ، ٢١٠
الاحتمال المسبق ، ٢٠٩
أحداث متنافية ، ٢١١
إحصاء استقرائى ، ١٢
الاحصاء المالى ، ١٥
إحصاء الإنفاق العائلى ، ١٩٨
إحصاءات وصفية ، ١٢
إحصائية ، ١٣
اختبار جودة التوفيق ، ٢٩٤ - ٢٩٨
اختبار كائى تربيع ، ٢٩٢ - ٣٠١
اختبار مهنوى (انظر اختبارات الفروض)
اختبار من طرف واحد ، ٢٨٠
اختبار من طرفين ، ٢٨٠
اختبار النسب
 ذى نسبة واحدة ، ٢٨٥ ، ٢٨٦
 ذى نسبتين ، ٢٨٦ ، ٢٨٧
اختبار الفروض ،
 توزيع - ٤ ، ٢٨٦ - ٢٩١
 توزيع طبيعى ، ٢٨١ - ٢٨٧
- توزيع كائى تربيع ، ٢٩٢ - ٣٠١
مفاهيم وقواعد ، ٢٧٨ - ٢٨٢
ارتباط ، ١٦٣ - ١٦٧
ارتباط واستقلال ، ١٦٤ ، ١٦٥
ارتباط الرتبة ، ١٦٦ - ١٦٩
ارتباط سلبى ، ١٦٤
أرصدة للأحلال ، ٥٥ ، ٥٦
أرقام قياسية ، ١٨٩ - ٢٠٤
الأرقام القياسية المرتبطة ، ١٩٨
أرقام قياسية غير مرجحة ، ١٩٠ ، ١٩١
استبعاد أثر التضخم ، ٢٠٠ ، ٢٠١
استقصاء ، ١٠٤ - ١٠٧
استراتيجيات اتخاذ القرار ، ٢٢٤
استكمال خارجى ، ١٦٢
استكمال داخلى ، ١٦٢
استهلاك الأصول الثابتة بطريقة النسب الثابتة ، ٥٨ ، ٥٩
الالتواء ، ١٢٩ ، ١٥١ - ١٥٥
الانحراف المتوسط ، ١٤٥ - ١٤٨
الانحراف المعياري ، ١٢٩ ، ١٤٥ - ١٤٦ ، ١٥٢
أنواع الخطأ فى اختبارات الفروض ، ٢٨١ ، ٢٨٢
الأهداف عند اتخاذ القرار ، ٢٢٤
أوزان ترجيح للقيم ، ١٩٥
- (ب)
بارامتر ، ١٣
برمجة خطية ، ٢٠ - ٢٤
- (ت)
تبادل ، ٢١٨

- تقدير ، ٢٧٤ - ٢٧٧
- توزيع طيبي ، ٢٥٥
- توزيع طيبي لاختبارات القروض ، ٢٨١ - ٢٨٧
- توزيع طيبي كتقريب ذى الحدين ، ٢٦٢ ، ٢٦٣
- توزيع طيبي ثنائى ١٦٥
- توزيع متصل ، ٢٥١ - ٢٥٦
- توزيع المعاينة بالأوساط ، ٢٦٥ - ٢٦٨
- توزيع المعاينة للتب ، ٢٦٨
- توزيع منفصل ، ٢٤٤ ، ٢٤٥
- توفيق أفضل ، ١٥٧ - ١٦٢
- (ج)
- جدول تكرارية ، ١٠٨ - ١١٢
- جدول اقران ، ٢٩٧ - ٣٠١
- جدول تكرار متجمع ، ١٠٩ ، ١١٠ ، ١٣٥
- جدول تكرار نسبى ١١٠ ، ١١١
- جدول تكرار نسبى متجمع ، ١١١
- جدول العائد ، ٢٢٧
- جزء مقطوع ، ١٨
- جمع ،
- الاحتمالات ، ٢١٠ ، ٢١١
- المصفوفات ، ٦٧
- (ح)
- حجم العينة ، ٢٧٢ ، ٢٧٣
- حد الإنجاز ، ٣٠٢ ، ٣٠٣
- حد الإنذار ، ٣٠٢ - ٣٠٣
- حد تحقيق للقة ، ١٠٩
- حلود الإحصاء ، ١٣ ، ١٤
- حلود اللة ، ١٣٨
- حرمة ، ١٠٩
- حساب التفاضل والتكامل ، ٨١ - ٩٧
- حكم بالمعينة ، ٩٩ ، ١٠٤
- ثابن ، ١٤١
- تحليل معادلات الدرجة الثانية إلى عوامل ، ٢٧ ، ٣٠
- تحليل المخل والمفرج ، ٧٩ - ٨٤
- تخيز فى الدراسات ، ١٤ ، ٩٩ ، ١٠٢ ، ١٠٦
- ترجيح الأرقام القياسية حسب الزمن المعطى ، ١٩١ ، ١٩٤
- ترجيح الأرقام القياسية طبقاً للسنة النموذجية ، ١٩١ - ١٩٥
- الترجيح القاعدى للأرقام القياسية ، ١٩١ - ١٩٥
- تشقت البيانات ، ١٤٠ - ١٥٢
- تصحيح مستمر ، ٢٦٢ ، ٢٦٣
- تصحيح بيتس المتصل ، ٣٠٠
- تعداد ، ٩٨
- تغير دورى ، ١٧٢ - ١٧٤
- تغير موسمى ، ١٧٢ - ١٨٧
- تفاضل ، ٨١ - ٩٧
- تقاطع الفئات ، ٢٠٥
- تقدير ، ٢٦٥ - ٢٧٧
- تقدير المعاينة
- الصفات ، ٣١١
- للمتغيرات ، ٣١٠ ، ٣١١
- تقدير بنقطة ، ٢٦٩
- تكرار ، ١٣ ، ١٠٨
- تكرار اللة ، ١٠٨
- تكلفة حدية (تكلفة هامشية) ، ٩١ - ٩٧
- تنبؤ ، ١٦١ - ١٦٤
- تنبؤ من السلاسل الزمنية ، ١٨٠ - ١٨٧
- توافق ، ٢٢٠ - ٢٢٣
- توافيق التوزيعات الطبيعية ، ٢٥٨ - ٢٦٢
- توزيع احتمالى ، ٢٤٤ - ٢٦٤
- توزيع بواسون ، ٢٤٨ - ٢٥٢
- توزيع بواسون كتقريب ذى الحدين ، ٢٥١ ، ٢٥٢
- توزيع ذى الحدين ، ٢٤٤ - ٢٤٩ ، ٢٥١ ، ٢٥٢
- توزيع - ٤ لستيدون (توزيع ٤)
- اختبارات القروض ، ٢٨٦ - ٢٩١

(خ)

- خريطة الضبط ، ٣٠٢ - ٣١٠
 خريطة ضبط جودة الإنتاج ، ٣٠١ - ٣٠٢
 خريطة مستطيلات مركبة ، ١٢٣ - ١٢٤
 خريطة مستطيلات مفردة ، ١٢٠ - ١٢٤
 خصم ، ٦٥ - ٦٥
 خط الانحدار ، ١٥٧ - ١٦٢
 خط التوزيع المتساوي ، ١١٦
 خط التوفيق الأفضل ، ١٥٧ - ١٦٢
 خط المستقيم ، ١٦ - ١٩
 خطأ معياري ، ٢١٦
 خفض أو استهلاك ، ٥٨ ، ٥٩

(د)

- دالة أسية ، ٤١ ، ٤٢
 دالة الإيراد ، ٩١ - ٩٧
 دالة التكلفة ، ٩١ - ٩٧
 دالة الكثافة الاحتمالية ، ٢٥٥
 دالة لوغاريتمية ، ٣٨ - ٤٢
 دخل إضافي ، ٩١ - ٩٧
 درجات الحرية
 اختبارات - ٤ ، ٢٧٤
 اختبارات كاي تربيع ، ٢٩٢ ، ٢٩٤ ، ٢٩٩
 دفعات سنوية مقسوية ، ٦٠
 دقة زائفة ، ١٣
 دورات اقتصاد ، ١٧٢

(ر)

- ربيع ، ١٤٨ ، ١٥٠ ، ١٥٣
 رسم بياني للسلاسل الزمنية ، ١١٦ - ١٢٠ ، ١٧٣
 رسم بياني نصف لوغاريتمي ، ١١٦ - ١٢٠
 رسم مصور ، ١٢٦ ، ١٢٧
 رسوم بيانية (انظر معادلات وأشكال بيانية)

رسوم دائرية ، ١٢٤ - ١٢٦

رقم باشي القياسي ، ١٩١ - ١٩٤

رقم قياسي لأسعار التجزئة ، ١٩٧ - ٢٠٠

رقم قياسي تجمعي بسيط ، ١٩٠

رقم قياسي تجمعي مرجع ، ١٩١ ، ١٩٣

رقم قياسي للسعر ، ١٨٩ - ١٩٣

رقم قياسي بطريقة السنة النموذجية ، ١٩٢ ، ١٩٣

رقم قياسي للقيم ، ١٩٢ ، ١٩٣

رقم قياسي كمي ، ١٩٢

رقم لاسيرز القياسي ، ١٩١ - ١٩٤

رياضة مالية ، ٤٥ - ٦٥

(ز)

زمن معلوم ، ١٨٩

(س)

- سببية ، ١٤ - ١٦٥
 سلاسل زمنية ، ١٧٢ - ١٨٨
 سلسلة من الأرقام القياسية للقاعدية ، ١٩٨
 سوء استخدام الإحصاء ، ١٣ ، ١٤

(ش)

- شجرات القرار ، ٢٢٨ - ٢٣٣
 شكل الانتشار ، ١٥٧ ، ١٥٨
 شكل بياني للنسب المئوية الموزعة ، ١٢٤
 شكل فن ، ٢٠٥ - ٢١٢
 شكوك في اتخاذ القرارات ، ٢٢٤ ، ٢٢٥

(ض)

ضرب

الاحتمالات ، ٢١٢ - ٢١٥

المصفوفات ، ٦٨

(ط)

- طرق الحماية ، ٩٩ - ١٠٥
 طريقة المتوسطات المتحركة ، ١٧٢ - ١٧٨

(م)

- متجه ، ٦٦
متجه عمودى ، ٦٦
متغير ، ١٢
متغير تابع ، ٨٢ ، ١٥٨
متغير كى ، ١٣
متغير كى ، ١٣
متغير مستقل ، ٨٢ ، ١٥٨
متغير منفصل ، ١٣
متوالية ، ٤٥ - ٥٤
متوالية عددية ، ٤٥ - ٥٠
متوالية هندسية ، ٤٩ - ٥٤
متوسطات متحركة ، ١٧٥ - ١٨٧
مثلث باسكال ، ٢٢١
مجموع ، ١٢ ، ٩٨
محدد المصفوفة ، ٧٢ ، ٧٣
مخطط الشجرة ، ٢٢٨ - ٢٣٣
مدرج تكرارى ، ١١١ - ١١٢ ، ١٣٨ ، ١٥٢
مدى ، ١٤٥ ، ٣٠٧
مراجعة بالعينه ، ٣٠٩ - ٣١٤
مربعات صغرى ، ١٥٧ - ١٦٢
مركبات السلاسل الزمنية ، ١٧٢ - ١٨١
مركبة عمود بياني ، ١٢٠ - ١٢٤
مركز استقصاء ، ١٠٤ - ١٠٧
مركز الفئة ، ١٠٩
مرونة الطلب ، ٩٥
مساحة الاختلاف ، ١١٦
نحت منحنى دالة الكثافة ، ٢٥١ - ٢٥٥
نحت المنحنى الطبقي ، ٢٥٥ ، ٢٥٩
مسائل تحقيق الحد الأدنى ، ٨٥ - ٩٥
مسائل تحقيق الحد الأقصى ، ٨٥ - ٩٥
مسائل الذفع المتسلسل ، ٥٦ - ٥٨
مستوى المنوعية ، ٢٧٨ - ٢٨١

طريقة المربعات الصغرى ، ١٥٧ - ١٦٢
طول الفئة ، ١٠٩

(ع)

- علم الاستجابة ، ١٠٩
علاقات غير خطية ، ١٦٥
عينه ، ١٢
عينه عشوائية بسيطة ، ٩٩ ، ١٠٠

(هـ)

- فاقد الفرصة ، ١١٨ - ٢٣٧
فائدة بسيطة ، ٤٥ ، ٤٦
فائدة بالتزايد ، ٥٤ - ٦٠
فائدة مركبة ، ٥٣ - ٦٠
فترة التقدير ، ٢٧٠ - ٢٧٧
فترة الثقة ، ٢٧٠ - ٢٧٧
فرض بديل ، ٢٧٨
فرق بين الأوساط ، ٢٨٣ ، ٢٨٤
فرق بين النسب ، ٢٨٦ ، ٢٨٧
فرق مشترك ، ٤٦
فترات ، ٢٠٥ - ٢٠٩
فئة المتوال ، ١٣٧ ، ١٣٨
فئة الوسيط ، ١٣٦

(ق)

- قاعدة قرار بايز ، ٢٢٧
قطع زائد قائم ، ٣٣ ، ٣٥ ، ٣٦
قواعد اتخاذ القرار ، ٢٣٩ - ٢٤٢
قوة الاختيار ، ٢٨١
قيمة حالية ، ٦٠ ، ٦١
قيمة متوقعة ، ٢٢٥ - ٢٣٠

(ك)

- كشف بالمعينة ، ٣١١ ، ٣١٢

- مشقة ، ٦٠ - ٨٢
مصادر للمعلومات الإحصائية ، ١٥
مصفوفات ، ٦٦ - ٨٠
مصفوفة المداخل والمخارج ، ٧٥
مصفوفة الوحدة ، ٦٩
مضارب ، ٢١٩
مضلع تكرارى ، ١١٢ ، ٢٥٤
مضلع تكرارى متجمع ، ١١٣ ، ١١٤ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٥٠
معادلات وأشكال بيانية ، ١٦ - ٤٤
معادلات آتية ، ١٨ - ٢٧ ، ٧١ ، ٧٢
معادلات خطية ، ١٦ - ٢٧
معادلات الدرجة الثانية ، ٢٧ - ٣٢
معادلات عادية ، ١٥٩
معامل
الارتباط ، ١٦٣ - ١٦٦
ارتباط الرتبة ، ١٦٦ - ١٦٩
الالتواء ، ١٥١ - ١٥٥
التحديد ، ١٦٤
التغير ، ١٥١
معامل بولى للالتواء ، ١٥٤
معامل بيرسون للالتواء ، ١٥١ - ١٥٤
معامل سيرمان لارتباط الرتب ، ١٧٢ - ١٧٦
معاملات تقنية ، ٧٥
معايينة احتمالية ، ٩٩ - ١٠٤
معايينة حسب القيمة التقديرية ، ٣١٣ - ٣١٤
معايينة حصية نسبية ، ١٠٣ - ١٠٤
معايينة طبيعية ، ١٠١ ، ١٠٢
معايينة عشوائية ، ٩٩ - ١٠٤
معايينة على مراحل ، ١٠٢ - ١٠٤
معايينة عتقودية ، ١٠٢
معايينة مقبولة ، ٣١٢ ، ٣١٣
معايينة منتظمة ، ١٠١
معدل التغير ، ٨١ ، ٨٢
معدل العائد الداخلى ، ٦٣ ، ٦٤
معلومات كاملة ، ٢٣٧ - ٢٣٩
مقابلة شخصية (مواجهة) ، ١٠٥ ، ١٠٦
مقاييس التخصيص ، ١٢٩ ، ١٤١
مقلوب المصفوفات ، ٧١ - ٧٤
مقياس اتخاذ القرار ، ٢٣٩ - ٢٤٢
مقياس الالتواء ، ١٥١ - ١٥٥
مقياس التغير ، ١٤١ - ١٥٢
مقياس الحد الأدنى - الأعلى ، ٢٤٠ - ٢٤٢
مقياس الحد الأعلى - الأدنى ، ٢٣٩ - ٢٤٢
مقياس الحد الأعلى - الأعلى ، ٢٤٠ ، ٢٤٢
ملخص سنوى للاحصاء ، ١٥
منافع فى اتخاذ القرارات ، ٢٢٥
متحنى لورنز ، ١١٤ - ١١٧
منسوب السعر ، ١٩١
منسوب كمي ، ١٩٣
منطقة حرجية ، ٢٧٨ - ٢٨٢
منطقة متاحة (الجملوى) ، ٢٣
منوال ، ١٢٩ ، ١٣٧ - ١٤١
ميل ، ١٨ ، ٨١
(ن)
نزعة مركزية ، ١٢٩
نسبة ، ١٣
نسبة مشتركة ، ٥٠
نسبة مئوية ، ١٣
نسبة المدى الربيعى ، ١٤٨ - ١٥٢ ، ١٥٣
نظريات بايز ، ٢١٤ - ٢١٨
نظرية الحد المركزى ، ٢٥٥ ، ٢٦٧
نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسى ، ٢٠١
نقطة الانقلاب ، ٨٦ ، ٨٨
نقطة الدوران ، ٨٥ - ٩٠
نقطة الدوران الصغرى ، ٨٦
نقطة الرجوع العظمى ، ٨٦

وسط الخريطة ، ٣٠٤ - ٣٠٧	قلل المصفوفات ، ٦٨ ، ٦٩
وسط فرضي ، ١٣١ ، ١٣٢ ، ١٤٤ ، ١٤٦ ، ١٤٨	(و)
وسط مرجع للناسيب ، ١٩٣ - ١٩٧	وسط ، ١٢٩ - ١٣٣ ، ١٣٩ ، ١٥٢
وسط ، ١٢٩ ، ١٣٣ - ١٣٨ ، ١٥٢ ، ١٥٣	وسط بسيط للناسيب ، ١٩١ ، ١٩٢
وقت قاعدتي ، ١٨٩	وسط حسابي ، ١٢٩ - ١٣٣ ، ١٣٩ ، ١٥٢

رقم الايداع بدار الكتب

١٩٨٤ / ٧٣٣٨



